

MATEMATICKÉ ZHODNOCENÍ PRŮBĚHU RELAXACE NAPĚTÍ VE SKLE

JAN KAVKA

Státní výzkumný ústav sklářský, 501 92 Hradec Králové, Škroupova 957

Došlo 14. 10. 1976

V práci je podáno matematické zpracování experimentálních dat získaných při sledování relaxace napětí v tvrzeném skle. Upravený empirický vztah pro logaritmickou rychlost relaxace se numericky integruje pomocí obecné lichoběžníkové formule a vypočítává se napětí v závislosti na čase během počáteční fáze nabíhání teploty vzorku na teplotu pece.

ÚVOD

Při sledování relaxace trvalého napětí ve vzorcích plochého skla typu Fourcault a Simax při teplotách 200 — 600 °C bylo zjištěno [1], že průběh napětí v čase lze popsat v určitém časovém intervalu funkcí

$$\frac{\sigma}{\sigma_0} = A - k \log \tau, \quad (1)$$

kde σ — napětí v čase τ ,
 σ_0 — počáteční napětí,
 τ — čas měřený od okamžiku vložení vzorku do pece o dané teplotě,
 A, k — konstanty závislé na složení a tloušťce skla a na teplotě.

Na obrázcích 1—4 jsou uvedeny relaxační křivky (převzaté z [2]) skla Fourcault pro teploty 200, 300, 400, a 500 °C. Derivováním (1) podle $\log \tau$ dostáváme

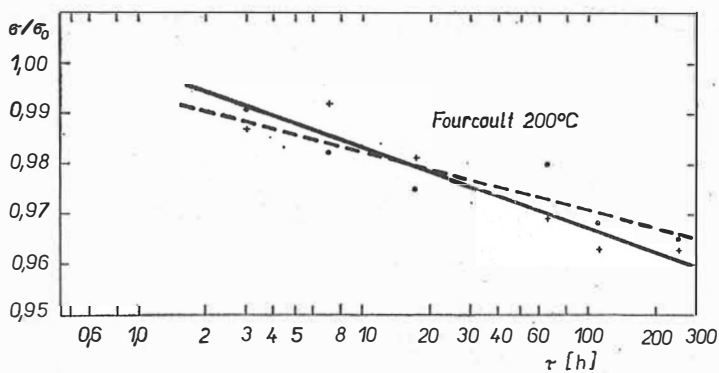
$$k = - \frac{\partial(\sigma/\sigma_0)}{\partial(\log \tau)}, \quad (2)$$

konstanta k tedy je logaritmická rychlost relaxace. Její teplotní závislost je vyjádřena podle [1] vztahem

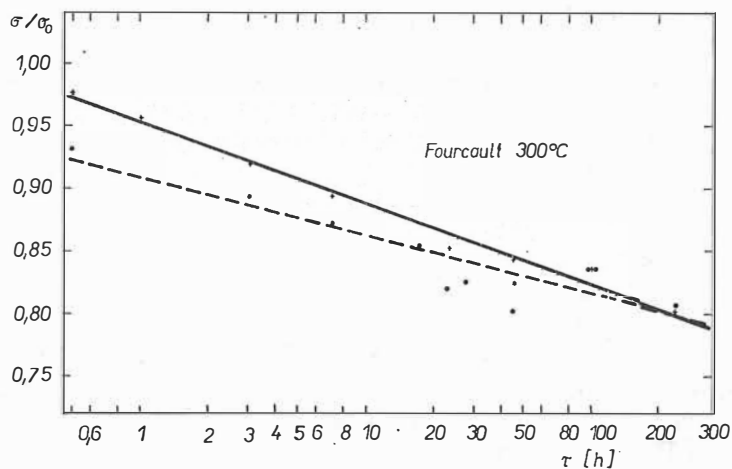
$$k = \exp(Bt + C), \quad (3)$$

kde t je teplota a veličiny B a C jsou pro dané složení skla konstantní. Pro sklo Fourcault tloušťky 4,6 a 9,5 mm je funkce (3) uvedena na obr. 5.

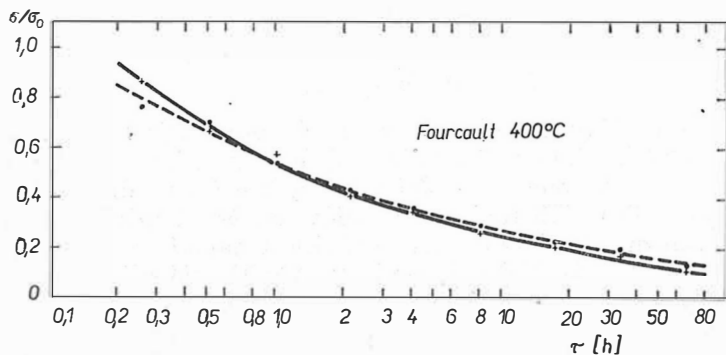
Časový interval, ve kterém se napětí jako funkce času řídí vztahem (1), se mění s teplotou. Pro nižší teploty odpovídá naměřená křivka výrazu (1) v celém vyšetřovaném časovém intervalu a závislost napětí na $\log \tau$ má přímkový tvar (viz obr. 1 a 2). Počínaje teplotou 400 °C začínají se projevovat odchylky experimentální závislosti od teoretické. Pro delší časy se projevuje zpomalování relaxace a přímka přechází v křivku konkávního tvaru. Tento jev bude analyzován na jiném místě. Předmětem této práce je diskuze pozvolného náběhu křivek v počátečních časech, jež lze pozorovat např. při teplotě



Obr. 1. Relaxace napětí ve skle Fourcault, $t_p = 200^\circ\text{C}$; $+ - 9,5 \text{ mm}$, $\bullet - 4,6 \text{ mm}$.

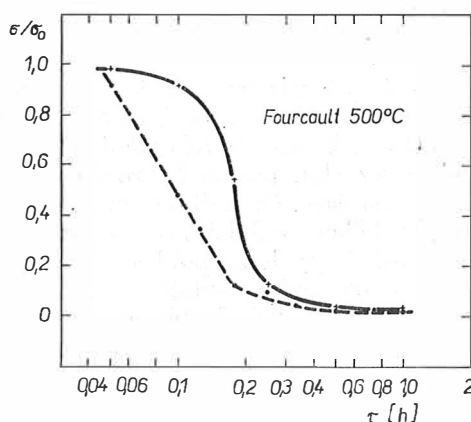


Obr. 2. Relaxace napětí ve skle Fourcault, $t_p = 300^\circ\text{C}$; $+ - 9,5 \text{ mm}$, $\bullet - 4,6 \text{ mm}$.

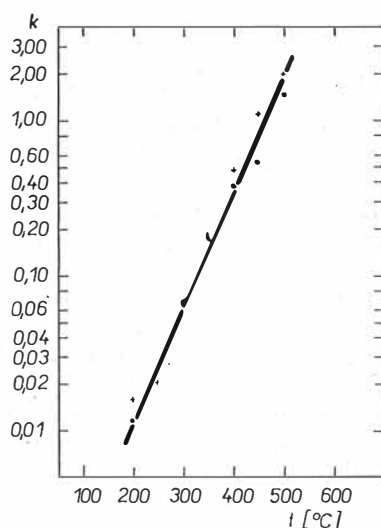


Obr. 3. Relaxace napětí ve skle Fourcault, $t_p = 400^\circ\text{C}$; $+ - 9,5 \text{ mm}$, $\bullet - 4,6 \text{ mm}$.

500 °C (obr. 4). Při nižších teplotách tato část křivek chybí; pokusíme se dokázat, že zde první měřený bod leží už za oblastí náběhu, který existuje při všech teplotách.



Obr. 4. Relaxace napětí ve skle Fourcalt, $t_p = 500\text{ }^{\circ}\text{C}$; + — 9,5 mm, • — 4,6 mm.



Obr. 5. Teplotní závislost logaritmické rychlosti k .

Tvar počáteční části křivek lze vysvětlit na základě experimentálního uspořádání, použitého při sledování relaxace [1]. Vzorek s trvalým napětím a s pokojovou teplotou byl vložen do pece vyhřáté na požadovanou teplotu. Po stanoveném čase byl vyjmut a po ochlazení na pokojovou teplotu v něm změřeno napětí. Čas, pro který bylo naměřeno napětí, tedy zahrnuje i čas nutný k vyhřátí vzorku. Protože rychlost relaxace roste s teplotou [3], pozorujeme v počáteční fázi vyhřívání vzorku oblast náběhu. Jelikož se v praxi tepelné

zpracování výrobků s trvalým napětím velmi často shoduje s výše uvedeným experimentálním postupem, je žádoucí se tímto náběhem relaxačních křivek podrobněji zabývat.

TEORETICKÁ ČÁST

Při ověřování platnosti výše uvedené teorie nelze použít vztah (1), protože jeho platnost je omezena na izotermní děje. Vyjdeme proto z relaxační rychlosti k . Můžeme-li předpokládat, že náběh relaxační křivky je způsoben postupným nabíháním teploty vzorku, potom k pro danou teplotu charakterizuje relaxaci napětí nezávisle na čase. Odvodíme nyní, že na základě znalosti k lze vypočítat průběh napětí během nabíhání teploty vzorku. Teplota vzorku se s časem mění a s ní se mění i rychlost poklesu napětí, přičemž v každém časovém bodě odpovídá k okamžité teplotě podle vztahu (3). Převedeme-li logaritmickou derivaci na normální, dostáváme pro rychlost relaxace vztah

$$\frac{\partial(\sigma/\sigma_0)}{\partial\tau} = -\frac{k}{2,3 \cdot \tau}. \quad (4)$$

Tento vztah je ovšem platný pouze v intervalu platnosti vztahu (1), z něhož byl odvozen, tj. v časovém intervalu, ve kterém byla prováděna měření relaxace. Extrapolace vztahu (1) především do nízkých hodnot τ je netriviální záležitostí. Protože v dalším výpočtu se neobejdeme bez hodnot relaxační

rychlosti v pravém okolí bodu 0, pokusíme se dodefinovat funkci $\frac{\partial(\sigma/\sigma_0)}{\partial\tau} = f(t, \tau)$ pro hodnoty $\tau \rightarrow 0$ takovým způsobem, aby odpovídala předpokládané fyzikální realitě a aby spojitě přecházela ve výraz (4) na dolní mezi intervalu jeho platnosti.

Vzhledem k závislosti fyzikálních vlastností skla na jeho teplotní historii musíme v dalších úvahách přihlížet k podmínkám tepelného zpracování vzorků, jež bylo součástí experimentálního postupu v práci [1] — viz předchozí kapitolu. Předpokládáme, že v časech $\tau \leq 0$ byla teplota skla konstantní $t = 20^\circ\text{C}$ a relaxace napětí byla (v souladu s výsledky práce [1]) nulová. V dalším průběhu času $\tau > 0$ se teplota skla zvyšuje a postupně se začíná projevovat i relaxace napětí, za jejíž mechanismus se obvykle při teplotách do $250\text{--}300^\circ\text{C}$ považuje difúze alkalických iontů základní sítě [4], [5]. Na základě uvedeného fyzikálního modelu lze požadavky na chování funkce $f(t, \tau)$ v pravém okolí bodu $\tau = 0$ formulovat takto: V bodě $\tau = 0$ musí být $f(t, \tau) = 0$, pro $\tau > 0$ musí $f(t, \tau)$ poměrně strmě narůst a přejít ve vztah (4). Těmto požadavkům poměrně dobře vyhovuje funkce

$$f'(t, \tau) = -\frac{k}{2,3 \cdot \tau} \exp\left(-\frac{1}{D\tau}\right), \quad (5)$$

kde D je konstanta. Velikost této konstanty ovlivňuje strmost náběhu funkce $f'(t, \tau)$ a oblast jejího přechodu ve vztah (4). Optimální hodnotu konstanty D určíme v dalším výkladu na základě srovnání s experimentálními výsledky [1] a [2].

Uvedené úpravě vztahu pro relaxační rychlost odpovídá následující průběh napětí v počátečních časech: Pro $\tau \leq 0$ je $\sigma = \text{konst} = \sigma_0$, s rostoucím časem

$\tau > 0$ začíná napětí klesat. Závislost napětí na čase je zpočátku konvexní; na spodní hranici intervalu platnosti vztahů (1) a (4) přechází v konkávní závislost (1).

Okamžitou velikost napětí v čase τ vypočteme integrací (5) podle času:

$$\frac{\sigma(\tau)}{\sigma_0} = - \int_0^\tau \frac{k}{2,3 \cdot \tau'} \exp\left(-\frac{1}{D\tau'}\right) d\tau' + E, \quad (6)$$

kde E je integrační konstanta.

Po dosazení počáteční podmínky

$$\sigma|_{\tau=0} = \sigma_0 \quad (7)$$

a užitím vztahu (3) dostáváme

$$\frac{\sigma(\tau)}{\sigma_0} = 1 - \int_0^\tau \frac{\exp(Bt + C)}{2,3 \cdot \tau'} \exp\left(-\frac{1}{D\tau'}\right) d\tau'. \quad (8)$$

Střední teplotu vzorku t_v v čase τ po vložení vzorku o počáteční střední teplotě t_0 do prostředí o teplotě t_p můžeme v prvním přiblížení vypočítat ze vztahu

$$t_v = t_p - (t_p - t_0) \exp\left(-\frac{\alpha \cdot S}{c \cdot G} \tau\right), \quad (9)$$

kde c — měrné teplo vzorku,

G — hmotnost vzorku,

S — plocha vzorku vyměňující teplo s okolím,

α — součinitel přestupu tepla [6].

Hledaný vztah pro napětí tedy má tvar

$$\begin{aligned} \frac{\sigma(\tau)}{\sigma_0} = 1 - \int_0^\tau \frac{1}{2,3 \cdot \tau'} \exp\left[B\left(t_p - (t_p - t_0) \exp\left(-\frac{\alpha S}{cG} \tau'\right)\right) + \right. \\ \left. + C - \frac{1}{D\tau'}\right] d\tau'. \end{aligned} \quad (10)$$

VÝPOČET

Odvození výpočetního postupu

Tvar integrandu činí možnost analytického řešení integrálu z výrazu (10) přinejmenším velmi obtížnou. Proto bylo přikročeno k numerickým metodám výpočtu integrálu. Na základě porovnání kapacity použitého počítače s požadavky na přesnost numerického výpočtu byla zvolena obecná lichoběžníková formule

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2} + R(n) = S(n) + R(n), \quad (11)$$

kde

$$x_i = a + i \frac{b-a}{n}, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n-1 \quad (12)$$

a n je přirozené číslo [7]. Chybu R je možno vypočítat ze vztahu

$$R(n) = -\frac{(b-a)^3}{12n^2} f''(\xi), \quad \xi \in \langle a, b \rangle. \quad (13)$$

Pro přímý výpočet chyby ze vztahu (13) by bylo nutné vypočítat druhou derivaci integrandu z (10); to vzhledem ke kapacitě počítače nebylo možné. Proto byl zvolen jiný postup určování přesnosti výpočtu. Zvolme pevné n a vypočteme hodnotu $S(n)$ ze vztahu (11). Vypočteme-li stejným způsobem $S(n') = S(2n)$, bude platit

$$S(n) + R(n) = \int_a^b f(\tau) d\tau = S(2n) + R(2n), \quad (14)$$

a

$$S(n) - S(2n) = R(2n) - R(n). \quad (15)$$

Použitím (13) dostáváme

$$R(2n) - R(n) = \frac{3(b-a)^3}{48n^2} f''(\xi) = -3R(2n). \quad (16)$$

Praktický význam vztahu (16) při výpočtu integrálu z výrazu (10) je následující. Provedeme-li výpočet tak, že po vyčíslení n -tého přiblížení $S(n)$ se číslo n zdvojnásobí ($n' = 2n$), vypočteme-li dále $S(n')$ a odečteme-li od sebe takto získané n -té a n' -té přiblížení, dostaneme horní odhad chyby přiblížení

$$|S(n) - S(n')| = |3R(n')| > \left| \int_a^b f(\tau) d\tau - S(n') \right|. \quad (17)$$

Výraz (10) vypočteme dosazením funkce

$$F(\tau) = \frac{1}{2,3 \cdot \tau} \exp \left[B \left\{ t_p - (t_p - t_0) \exp \left(-\frac{\alpha S}{cG} \tau \right) \right\} + C - \frac{1}{D\tau} \right] \quad (18)$$

do obecné lichoběžníkové formule (11). Veličiny α a c ve vztahu (18) vzrůstají s teplotou. Kapacita použitého počítače však neumožnila tyto teplotní závislosti do výpočtu zařadit. Jelikož se ale α i c ve výpočtu vyskytují vždy ve formě podílu $\frac{\alpha}{c}$, neprojeví se jejich teplotní závislost příliš výrazně. Nedomluvíme se proto příliš velké chyby, budeme-li při výpočtu brát hodnoty α a c pro časovou střední teplotu během vyhřívání. Pro příslušnou dobu vyhřívání se časová střední teplota $\bar{t}_v$ vypočte ze vztahu

$$\begin{aligned} \bar{t}_v &= t_p - \frac{t_p - t_0}{\tau} \int_0^\tau \exp \left(-\frac{\alpha S}{cG} \tau' \right) d\tau' = \\ &= t_p - \frac{(t_p - t_0) \left[1 - \exp \left(-\frac{\alpha S}{cG} \tau \right) \right]}{\tau \frac{\alpha S}{cG}}. \end{aligned} \quad (19)$$

Problém s teplotní závislostí α a c , který zde opět vyvstává, byl řešen iteračním postupem: odhadem $\bar{t}_{v1}$ a použitím $\alpha(\bar{t}_{v1})$ a $c(\bar{t}_{v1})$ bylo pomocí vztahu (19) vypočteno druhé přiblížení $\bar{t}_{v2}$. Třetí přiblížení $\bar{t}_{v3}$ bylo vypočteno pomocí

opravených hodnot $\alpha(\bar{t}_{v2})$ a $c(\bar{t}_{v2})$ a tento postup byl opakován tak dlouho, pokud jsme se nepřiblížili pravé hodnotě $\bar{t}_v$ s požadovanou přesností.

Použité hodnoty α a c pro sklo Fourcault, získané z [8] a [9], jsou uvedeny v tab. I. Pro teploty neuvedené v tab. I byly hodnoty α a c počítány lineární interpolací.

Hodnoty dalších konstant použitých ve vztahu (18) pro vzorek skla Fourcault rozměru $1 \times 4 \times 6$ cm udává tab. II. Hodnota konstanty D byla určena srovnáním s relaxační křivkou pro teplotu pece $t_p = 200^\circ\text{C}$ uvedenou v práci [2].

Tabulka I

$t[^\circ\text{C}]$	$\alpha \left[\frac{\text{W}}{\text{m}^2\text{K}} \right]$	$c \left[\frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}} \right]$
100	14,0	929
150	18,8	1 005
200	22,3	1 068
250	27,9	1 118
300	34,9	1 160
350	43,3	1 197
400	50,9	1 227
450	61,4	1 256
500	73,3	1 285

Tabulka II

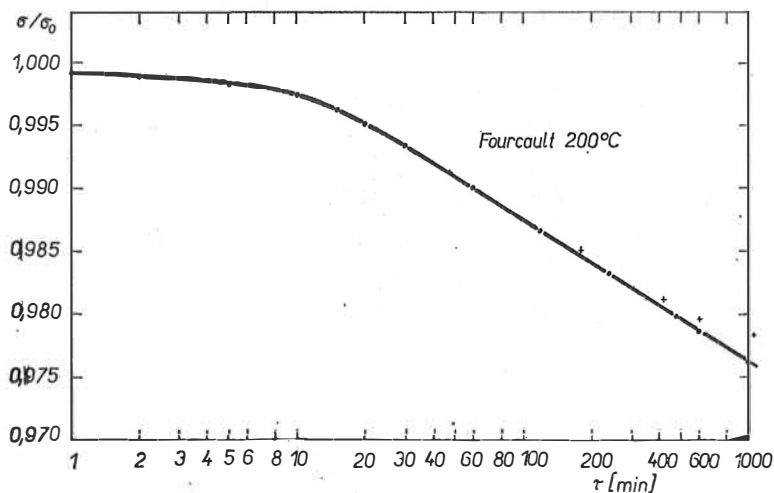
Konstanta	Rozměr	Hodnota	Pramen
B	$^\circ\text{C}^{-1}$	0,017	[1]
C	—	—7,89	[1]
D	s^{-1}	10^3	srovnání s [2]
S	cm^2	68	výpočet
G	g	59,76	měření

Vlastní výpočet

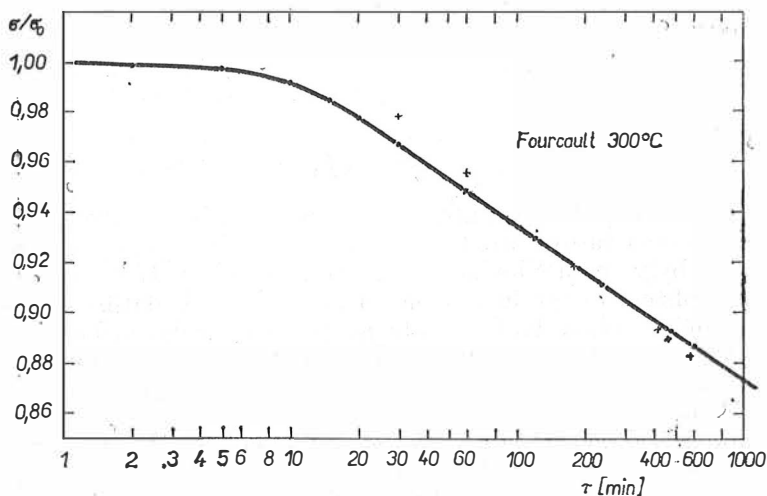
Napětí bylo vypočteno takto: Ze vztahu (19) byla výše uvedeným způsobem vypočtena časová střední teplota $\bar{t}_v$ a z tab. I jí odpovídající hodnoty α a c , které byly spolu s hodnotami B , C , S , G z tab. II použity při výpočtu prvního přiblížení integrálu S_1 pomocí (18) a (11). V dalším kroku bylo $2 \times$ zjemněno dělení časového intervalu a spočteno druhé přiblížení S_2 . Pokud byla chyba přiblížení spočtená podle (17) větší než požadovaná přesnost, bylo číslo n ze vztahu (12) znovu zdvojnásobeno a spočteno třetí přiblížení. Celý postup byl opakován tak dlouho, dokud chyba přiblížení neklesla pod požadovanou hodnotu. Příslušná hodnota napětí byla pak spočtena ze vztahu (10). Vypočtené hodnoty v porovnání s experimentálními hodnotami jsou pro 4 vybrané teploty uvedeny na obr. 6—9.

DISKUSE

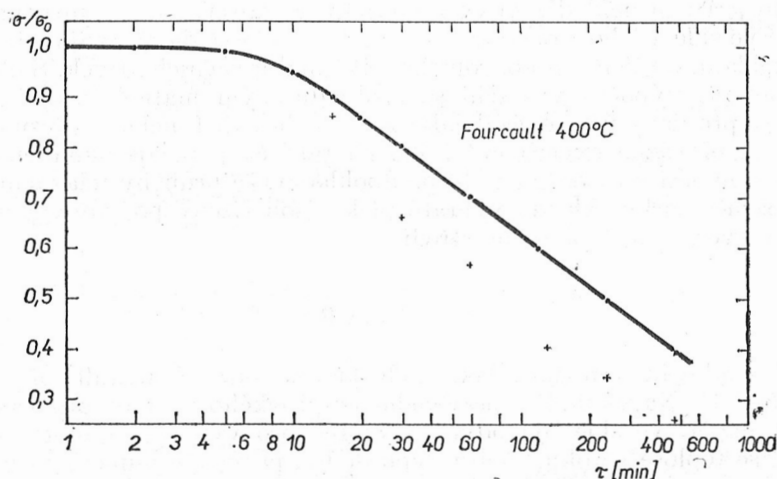
Hodnota konstanty D zavedená ve vztahu (5) (a tím i extrapolace relaxační rychlosti k nulovým hodnotám času) byla určena srovnáním s experimentálními výsledky při teplotě 200 °C, náběhy relaxačních křivek na ostatních teplotách byly spočteny s použitím takto zjištěné hodnoty D . Jak vyplývá z obrázků 6—9, použitá extrapolace vedla k vcelku dobré shodě vypočtených hodnot s experimentálními, i když se stupeň přiblížení pro sledované teploty liší. Pro 200 °C není odchylka vypočtených a experimentálních hodnot větší než 0,25 %.



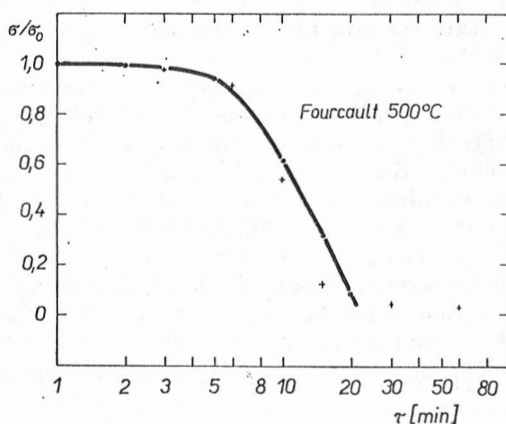
Obr. 6. Relaxace napětí ve skle Fourcault, $t_p = 200$ °C; • — výpočet, + — experiment.



Obr. 7. Relaxace napětí ve skle Fourcault, $t_p = 300$ °C; • — výpočet, + — experiment.



Obr. 8. Relaxace napětí ve skle Fourcault, $t_p = 400^\circ\text{C}$; ● — výpočet, + — experiment.



Obr. 9. Relaxace napětí ve skle Fourcault, $t_p = 500^\circ\text{C}$; ● — výpočet, + — experiment.

naproti tomu největší rozdíly jsou při teplotách 400 a 500°C , kde činí až 15–20 %. Kromě již uvedené extrapolace relaxační rychlosti jsou příčinou uvedených chyb:

1. Nepřesnosti ve výpočtu teploty vzniklé použitím vztahu (9) a středních hodnot $\alpha(\bar{t}_v)$ a $c(\bar{t}_v)$.
2. Odchytky skutečného průběhu napětí od vztahu (1).
3. Odchytky skutečných hodnot k od hodnot vypočtených z (3).

Chyby prvního druhu se projevují pouze v kratších časech, kdy se ještě teplota vzorku podstatně liší od teploty prostředí, nelze je ovšem odlišit od chyb způsobených extrapolací. Vliv obou těchto chyb je však mnohem méně výrazný než chyby 2 resp. 3, jimž je možno připsat odchytky závislosti v delších časech při 500°C (viz obr. 4 a 9), resp. odchytky při 400°C (srovnej obr. 5 a 8).

Tato práce si nekladla za cíl teoreticky se zabývat mechanismem relaxace napětí ve skle a jeho exaktním matematickým vajíádřením. Šlo zde o ověření předpokladu o příčinách pozvolného náběhu relaxačních křivek. S ohledem na to jsme při výpočtu vystačili se zjednodušeným matematickým modelem, který se pro daný účel ukázal jako zcela vyhovující, neboť s přesností danou chybami převážně experimentálního charakteru popisuje naměřené průběhy relaxace napětí v čase. Lze tedy předpokládat, že průběhy relaxačních křivek po vložení vzorku skla do vyhřáté pícky jsou řízeny postupným nabíháním teploty vzorku na teplotu prostředí.

ZÁVĚR

Byl studován průběh relaxačních křivek skla Fourcault při teplotách 200—500 °C. Na základě upraveného empirického vztahu pro časovou závislost napětí ve skle byl odvozen vzorec pro výpočet hodnoty napětí při měnění se teplotě vzorku. Tento výpočet byl prováděn numericky na stolním programovatelném počítači Hewlett-Packard 9810 s použitím obecné lichoběžníkové integrační formule. Srovnání vypočtených výsledků s experimentálními prokázalo, že počáteční průběh relaxačních křivek po vložení vzorku skla do pícky vyhřáté na konstantní teplotu je řízen vyrovnáváním teploty vzorku na teplotu prostředí.

Odvozený výpočetní postup je zajímavý nejen z teoretického hlediska jako příspěvek k vysvětlení průběhu relaxačních křivek. Bylo by možno jej využít též při výpočtech ryze praktického zaměření — např. při návrhu chladicích postupů. Dosavadní praxe většinou aproximovala proces snižování trvalého napětí ve výrobku dvěma diskrétními časovými úseky: 1. — vyhřívání výrobku na danou teplotu v chladicím intervalu a 2. — uvolňování trvalého napětí při výdrži na této teplotě. Vhodnou modifikací výsledků této práce s ohledem na konkrétní případy teplotní historie výrobků by bylo možno určovat stupeň relaxace trvalého napětí ve výrobku během jeho vyhřívání na chladicí teplotu, a tím de facto spojit oba výše uvedené úseky chladicího postupu, což by mělo za následek časové a tím i energetické úspory při chlazení.

Poděkování

Závěrem bych chtěl co nejsrdečněji poděkovat svým spolupracovníkům Ing. V. Novotnému, CSc., za nezištné poskytnutí svých experimentálních výsledků v původní číselné formě a I. Ehlové za pečlivé nakreslení obrázků. Bez jejich přispění by bylo možno tuto práci jen stěží dokončit.

Literatura

- [1] Novotný V.: Výzkum tvrzení užitkového a technického skla. [Výzkumná zpráva] SVÚS, Hradec Králové, 1972.
- [2] Novotný V.: Výzkum tvrzení užitkového a technického skla. [Výzkumná zpráva] SVÚS, Hradec Králové, 1970.
- [3] Lioznjanskaja S. G., Bartenev G. M.: *Steklo* 10, 18 (1957).
- [4] Rötger H.: *Entwicklung und Anwendung der Vorstellungen über das Relaxationsverhalten von Glas*. Sitzungsberichte der AdW der DDR, 3N/1975.

- [5] *Relaxation Processes in Glasses* (red. D. E. Day), 1. vyd. North-Holland Publishing Company, Amsterdam 1974.
 [6] Heiligenstädt W.: *Wärmetechnische Rechnungen für Industrieöfen*, 4. vyd. Verlag Stahleisen, Düsseldorf 1966.
 [7] Demidovič B. P., Maron J. A.: *Základy numerické matematiky*, 1. vyd. SNTL, Praha 1966.
 [8] Schill F.: Určení optimálních chladicích postupů pro láhve a konstrukce elektrické vířivé pece. [Výzkumná zpráva] SVÚS, Hradec Králové, 1970.
 [9] Schill F.: Výzkum chladicích postupů ve vířivé atmosféře. [Výzkumná zpráva] SVÚS, Hradec Králové 1967.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОБРАБОТКА ХОДА РЕЛАКСАЦИИ НАПРЯЖЕНИЯ В СТЕКЛЕ

Ян Кавка

Научно-исследовательский институт стекла, Градец-Кралове

В статье приводится математическая обработка начального хода временных зависимостей релаксации напряжения в закаленном стекле, полученных измерением в работе [1] или [2] при температурах 200—600 °C.

Путем деривации эмпирического отношения (1),

где σ — напряжение во время τ ,

σ_0 — исходное напряжение,

τ — время, измеряемое от момента помещения пробы в печь с данной температурой,

A, κ — константы, зависящие от состава и толщины стекла и от температуры вывели для скорости релаксации выражение (4), которое экстраполировали до величин $\tau \rightarrow 0$ отношением (5), причем B, C и D — постоянные величины. Интегрированием отношения (5) при предположении аппроксимации хода средней температуры пробы t_b после помещения в среду с температурой t_p отношением (9),

где t_0 — исходная температура пробы,

c — удельная теплота пробы,

G — масса пробы,

S — плоскость поверхности пробы,

α — коэффициент теплопередачи

для моментальной величины напряжения выводили выражение (10).

Для численного расчета интеграла из (10) пользовались общей трансцендентальной формулой (11), (12) с оценкой погрешности аппроксимации согласно (17). Для расчета пользовались величинами $\alpha(t_b)$ и $c(t_b)$ из таблицы I, где t_b — временная средняя величина рассчитанная путем итераций согласно (19), а величинами B, C, D, S, G из таблицы II.

Из рисунка 6—9 видно, что с помощью применяемой модели можно достигать хорошего согласия рассчитанных результатов с экспериментальными данными. Большие отклонения вызываются прежде всего отклонениями действительного хода напряжения от зависимости (1) и отклонениями действительных величин κ от величин, рассчитанных из (3). Показывается, что начальный ход кривых релаксации после помещения пробы в печь, нагретой до постоянной температуры, управляется постепенным повышением температуры пробы до температуры среды.

Рис. 1. Релаксация напряжения в стекле Fourcault; $t_p = 200$ °C, + — 9,5 мм, ● — 4,6 мм.

Рис. 2. Релаксация напряжения в стекле Fourcault; $t_p = 300$ °C, + — 9,5 мм, ● — 4,6 мм.

Рис. 3. Релаксация напряжения в стекле Fourcault; $t_p = 400$ °C, + — 9,5 мм, ● — 4,6 мм.

Рис. 4. Релаксация напряжения в стекле Fourcault; $t_p = 500$ °C, + — 9,5 мм, ● — 4,6 мм.

Рис. 5. Температурная зависимость логарифмической скорости κ .

Рис. 6. Релаксация напряжения в стекле Fourcault; $t_p = 200$ °C, ● — расчет, + — эксперимент.

Рис. 7. Релаксация напряжения в стекле Fourcault; $t_p = 300$ °C, ● — расчет, + — эксперимент.

Рис. 8. Релаксация напряжения в стекле Fourcault; $t_p = 400$ °C, ● — расчет, + — эксперимент.

Рис. 9. Релаксация напряжения в стекле Fourcault; $t_p = 500$ °C, ● — расчет, + — эксперимент.

MATHEMATICAL EVALUATION OF THE COURSE OF STRESS
RELAXATION IN GLASS

Jan Kavka

State Research Institute of Glass Technology, Hradec Králové

The paper presents a mathematical analysis of the initial course of stress relaxation in toughened glass as measured in study [1] and [2] at temperatures of 200—600° C.

By differentiation of empirical relationship (1), where

σ is stress in time τ ,

σ_0 is initial stress,

τ is the time since placing the sample in the furnace at the given temperature,

A , k are constants depending on glass composition and thickness, and temperature, relation (4) was derived for the rate of relaxation, and extrapolated for $\tau \rightarrow 0$ using equation (5) where B , C and D are constants. Equation (10) was derived for the instantaneous stress values by integrating relationship (5) on the assumption of approximating the mean sample temperature t_v after placing the sample into a medium of temperature t_p by the formula (9) where t_0 is initial sample temperature,

c is specific heat of the sample

G is sample weight,

S is sample surface area,

α is the heat transfer coefficient.

The integral in (10) was calculated numerically by the general trapezoidal formula (11), (12) using the approximation error estimate given by (17). In the calculation use was made of values $\alpha(i_v)$ and $c(i_v)$ from Table I, where i_v is the time mean temperature calculated iteratively using relation (19), and the B , C , D , s , G , values were taken from Table II.

Figs. 6—9 imply that the model in question yielded a generally satisfactory agreement of the calculated results with the experimental ones. The major deviations were above all due to deviations of the actual stress course from relationship (1) and to deviations of the actual k values from those calculated from (3). It appears that the initial course of relaxation curves after placing the sample in the furnace heated to a constant temperature is controlled by gradual heating up of the sample to the ambient temperature.

Fig. 1. Stress relaxation in Fourcault glass; $t_p = 200^\circ \text{C}$, + — 9.5 mm, ● — 4.6 mm.

Fig. 2. Stress relaxation in Fourcault glass; $t_p = 300^\circ \text{C}$, + — 9.5 mm, ● — 4.6 mm.

Fig. 3. Stress relaxation in Fourcault glass; $t_p = 400^\circ \text{C}$, + — 9.4 mm, ● — 4.6 mm.

Fig. 4. Stress relaxation in Fourcault glass; $t_p = 500^\circ \text{C}$, + — 9.5 mm, ● — 4.6 mm.

Fig. 5. Temperature dependence of logarithmic rate k .

Fig. 6. Stress relaxation in Fourcault glass; $t_p = 200^\circ \text{C}$, ● — calculated, + — experimental.

Fig. 7. Stress relaxation in Fourcault glass; $t_p = 300^\circ \text{C}$, ● — calculated, + — experimental.

Fig. 8. Stress relaxation in Fourcault glass; $t_p = 400^\circ \text{C}$, ● — calculated, + — experimental.

Fig. 9. Stress relaxation in Fourcault glass; $t_p = 500^\circ \text{C}$, ● — calculated, + — experimental.