Silikáty XXIII, s. 23—35 (1979)

NESTACIONÁRNÍ MOMENTOVÁ METODA STANOVENÍ TEPLOTNÍ VODIVOSTI

Petr Schill

Státní výzkumný ústav sklářský, 501 92 Hradec Králové, Škroupova 957

Došlo 13. 12. 1977

V této práci bude navržena nová metoda pro stanovení teplotní vodivosti založená na momentovém řešení rovnice vedení tepla a vhodná pro tepelně izolační materiály.

ÚVOD

Zjišťování součinitele tepelné nebo teplotní vodivosti lze provést v podstatě několika způsoby, které jsou určeny tepelným režimem, v němž se uskutečňuje měření. Nejčastěji se měření provádí ve stacionárním, regulárním, nebo nestacionárním režimu. Pro každý z těchto tří způsobů měření bylo vypracováno několik konkrétních metod, které se používají v praxi. Obecně lze říci, že pro dobře tepelně vodivé látky postačí stacionární metody a pro tepelné izolanty jsou z časových důvodů vhodnější nestacionární, popř. regulární metody. Není účelem tohoto pojednání se zde dále podrobně zabývat všemi těmito metodami, kterých je mnoho [1], [3], ale protože se dále uvedená navrhovaná metoda bude týkat oblasti nestacionárního režimu, bude vhodné se alespoň ve stručnosti zmínit o dvou metodách pracujících v regulární a nestacionární oblasti.

Mezi metody spadající do regulární oblasti patří např. metoda konstantně vyhřívaného lineárního zdroje tepla [2]. Princip metody spočívá v měření teploty tenkého topného drátu, který prochází vzorkem a který je elektricky vyhříván tak, aby tvořil časově konstantní lineární tepelný zdroj. Tento topný drát je zároveň termočlánkem, takže měření je pouze jednosondové. Korektní vyhodnocení tohoto měření je podmíněno několika předpoklady:

1. malý poloměr drátu (pro izolační materiály cca $r = 0{,}5$ mm),
2. velký poměr délky k poloměru drátu (cca 100),
3. prostředí kolem drátu je homogenní, izotropní a velikostí se musí přibližovat „nekonečnému tělesu".

Za těchto předpokladů lze řešením rovnice vedení tepla v nekonečném prostředí získat vztah pro časový průběh teploty v místě drátu, který má v regulární oblasti dané časovým vymezením $\tau \in \langle \tau_1; \infty$ tvar

$$T = \frac{Q}{4\pi\lambda} \ln \tau, \qquad \text{(i)}$$

kde λ je tepelná vodivost, τ_1 je doba náběhu, Q je konstantní tepelný zdroj. Tepelnou vodivost $\lambda(T)$ lze ze vztahu (i) určit současným měřením T a τ. Pro izolační materiály je doba τ_1, určující počátek měření, přibližně 1 až 2 min.

Mezi nestacionární metody patří např. velmi rozšířená impulsní metoda, která vyžaduje vytvoření okamžitého, krátkodobého tepelného zdroje ve vzorku. Pro případ lineárního okamžitého tepelného zdroje Q_0 a za stejných předpokladů 1, 2, 3 uvedených výše lze vyjádřit přibližné rozdělení teploty ve vzorku funkcí

$$T(x, \tau) = \frac{Q_0}{4\pi\lambda} \exp\left(-\frac{x^2}{4a\tau}\right), \tag{ii}$$

kde a je teplotní vodivost a x je kolmá vzdálenost od topného drátu. Tento vztah (ii) je dobře vyhovující pro $x < \frac{b}{2}$, kde b je délka drátu ve vzorku (která je v praxi rovna jednomu rozměru vzorku). Funkce (ii) má časový extrém $T_{\max}$ při $\tau_{\max}$ a po experimentálním stanovení těchto hodnot lze pomocí rov. (ii) vypočítat veličiny a a λ. Impulsní metoda má ještě několik dalších praktických modifikací [1], [3] a v průměru je jejich přesnost cca 8—12 %.

Navrhovaná metoda stanovení teplotní vodivosti patří do nestacionární oblasti, a je tedy vhodná pro izolační materiály. Je založena na výpočtu rozdělení teploty aproximativní metodou momentů v konečném „jednorozměrném" tělese se symetrickými okrajovými podmínkami I. druhu. Dosazením změřené hodnoty teploty $T\left(\frac{1}{2}, \tau_1\right)$, které se dosáhne v místě 1/2 pološířky vzorku v určitém časovém okamžiku τ_1 (daném registrovatelným začátkem změny počáteční teploty T_0 ve středu vzorku) a hodnoty τ_1 do funkce rozdělení teploty, lze jednoduchým způsobem vypočítat střední teplotní vodivost a_s materiálu mezi teplotami T_0 a T_w (T_w je teplota povrchu vzorku). Hodnoty časů τ_1 jsou pro izolanty řádově pouze desítky sekund a závisí na teplotách T_0 a T_w. Tato metoda je tedy vhodná pro rychlé stanovení střední teplotní vodivosti izolačních materiálů pro libovolný interval teplot $\Delta T = T_w - T_0$, přičemž přesnost se zvyšuje se zmenšováním intervalu teplot ΔT. Při použití vzorku ve tvaru kvádru je nutno experimentálně vytvořit podmínky zaručující tepelnou „nekonečnost" vzorku ve dvou směrech tak, aby se tepelný tok šířil pouze ve třetím směru (ve směru šířky vzorku). Podobné podmínky se musí zajišťovat prakticky při všech používaných metodách. Nevýhodou navrhované metody je nutnost měření teplot ve dvou vnitřních místech vzorku (ve středu a v 1/2 pološířky), přičemž ale postačí pouze stanovení teplotních rozdílů vzhledem k počáteční teplotě T_0 v těchto místech a není nutno stanovovat tyto teploty v absolutních hodnotách, což zvyšuje celkovou přesnost metody. Další nevýhodou je požadavek na vyrovnání teplot ve vzorku před každým měřením, což ale není na obtíž, zajímáme-li se o střední teplotní vodivost mezi pokojovou a nějakou danou teplotou; takové hodnoty a_s jsou v mnoha případech v praxi postačující, např. pro izolační materiály ve stavebnictví.

SPECIFIKACE ÚLOHY

Prvním stupněm celého postupu bude určení funkce vyjadřující rozdělení teploty v jednorozměrné konečné desce vystavené symetrické okrajové podmínce I. druhu. Dalším stupněm bude modifikace této funkce pro jednoduchý výpočet střední teplotní vodivosti a_s z naměřených hodnot $T(1/2, \tau_1)$ a τ_1. Tvar funkce pro nestacionární rozdělení teploty, určený metodou momentů, je velmi výhodný pro aplikace na stanovení střední teplotní vodivosti.

Protože jde o izolační materiály s malou tepelnou vodivostí λ rovnou řádově 10^{-1} $Wm^{-1}K^{-1}$ (např. různé matrace ze skleněných vláken), lze obecnou okrajovou podmínkou III. druhu spojitosti tepelného toku povrchem s úspěchem nahradit okrajovou podmínkou I. druhu určenou zadáním povrchové teploty T_w. Uvažujme např. desku s hodnotou $\lambda = 0{,}2$ $Wm^{-1}K^{-1}$ polotloušťky $\delta = 2$ cm, vyhřátou na konstantní teplotu $T_0 = 800$ °C a náhle vloženou mezi dva shodné radiační deskové zdroje o konstantní teplotě $T_s = 1000$ °C. V případě, že vzdálenost desek mezi sebou je malá, lze z poměrných pohltivostí materiálů přímo odhadnout konfigurační součinitel záření $\mathscr{F}$. V uvedeném případě byl odhad stanoven hodnotou $\mathscr{F} = 0{,}7$. Potom je radiační číslo ohřevu M_s rovno

$$M_s = \frac{\sigma \mathscr{F} T_s^3 \, \delta}{\lambda} \doteq 8, \tag{1}$$

kde σ je Stefan—Boltzmannova konstanta ($\sigma = 5{,}67 \,.\, 10^{-8}$ $Wm^{-2}K^{-1}$) a teplota T_s je ve K. Hodnota určená vztahem (1) je dostatečně vysoká, přičemž poměr $T_0 / T_s \doteq 0{,}8$, jenž je blízký 1, ještě více zlepšuje podmínky pro vzájemné nahrazení uvedených okrajových podmínek [4]. Tento příklad má pouze ilustrovat reálnou použitelnost dalších výpočtů, avšak nemá na ně vliv, protože se dále vychází z okrajové podmínky I. druhu jako dané.

Okrajová podmínka I. druhu pro vyšetřovanou úlohu je tedy stanovena takto:

1. Počáteční podmínka pro čas $\tau = 0$ je

$$T(x, 0) = T_0 = \text{konst.} \tag{2}$$

2. Hraniční podmínky pro čas $\tau > 0$ jsou

a) $T(-\delta, \tau) = T(\delta, \tau) = T_w = \text{konst.},$ (3)

b) $\left(\dfrac{\partial T}{\partial x}\right)_{x=0} = 0.$ (4)

Deska je orientovaná tak, že tepelný tok prochází ve směru osy x (tj. ve směru tloušťky desky), přičemž stěny desky (kolmé na osu x), vystavené tepelné interakci s okolím, jsou velké ve srovnání s její tloušťkou, takže tepelné toky ve směrech os y a z jsou nulové. Teplota T (dále vždy ve °C) je tedy funkcí rozměru x a času τ.

INTEGRAČNÍ METODA MOMENTŮ

Východiskem je známá metoda momentů, kterou poprvé aplikoval Fujita [5] pro výpočet difúze v desce konečné tloušťky. Tato metoda je dále upravena pro výpočet vedení tepla, zobecněna pro případy nenulových okrajových podmínek zavedením obecných bezrozměrných proměnných a doplněna odvozením dalších vztahů vhodných pro aplikaci na měření teplotní vodivosti.

Rovnici vedení tepla pro jednorozměrný případ se součinitelem teplotní vodivosti $a(T)$ závislým na teplotě

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial x}\left(a(T)\,\frac{\partial T}{\partial x}\right) \tag{5}$$

lze pomocí diferenciálních transformačních rovnic daných zavedením bezrozměrných proměnných

$$\Theta = \frac{T - T_0}{T_w - T_0}, \qquad F_0 = \frac{a_w \tau}{\delta^2}, \qquad \xi = \frac{x}{\delta} \tag{6}$$

přetransformovat do tvaru

$$\frac{\partial \Theta}{\partial F_0} = \frac{\partial}{\partial \xi}\left(a(\Theta) \frac{\partial \Theta}{\partial \xi}\right), \tag{7}$$

kde je použito označení

$$a_w \equiv a(T_w); \; a(\Theta) = \frac{a(T)}{a_w}. \tag{8}$$

Okrajové podmínky (2), (3), (4) budou mít po zavedení bezrozměrných proměnných (6) tvar

a) pro $\tau = 0$

$$F_0 = 0; \quad -1 \leqq \xi \leqq 1; \quad \Theta(\xi, 0) = 0, \tag{9}$$

b) pro $\tau > 0$

$$F_0 > 0; \quad \xi = \pm 1; \quad \Theta(\pm 1, F_0) = 1, \tag{10}$$

$$\xi = 0; \qquad \left(\frac{\partial \Theta}{\partial \xi}\right)_{\xi=0} = 0. \tag{11}$$

Dosazením nějakého přibližného řešení Θ rovnice (7) zpět do rovnice (7) vznikne určitý zbytek ε:

$$\frac{\partial \Theta}{\partial F_0} - \frac{\partial}{\partial \xi}\left(a(\Theta) \frac{\partial \Theta}{\partial \xi}\right) = \varepsilon. \tag{12}$$

Přibližné řešení Θ je v tomto postupu zvoleno předem ve tvaru

$$\Theta(\xi, F_0) = B(F_0)\,[|\xi| - |\xi_0(F_0)|]^2 + E(F_0)\,[|\xi| - |\xi_0(F_0)|]^3. \tag{13}$$

Protože je úloha symetrická, postačí ji dále řešit pouze na intervalu $\langle 0; 1\rangle$, a tím ve vztahu (13) odpadnou absolutní hodnoty.

Vlastní princip metody spočívá v tom, že se zbytek postupně vynásobí jednoduchými váhovými faktory $\xi^0 \equiv 1$ a $\xi^1 \equiv \xi$, integrálně zprůměruje přes celý obor proměnné ξ (tj. vzhledem k symetričnosti úlohy přes interval $\langle 0; 1\rangle$) a takto získaný integrální zbytek se položí roven nule, čímž vzniknou dvě integrální rovnice nultého a prvního momentu:

$$\int_0^1 \left\{\frac{\partial \Theta}{\partial F_0} - \frac{\partial}{\partial \xi}\left[a(\Theta) \frac{\partial \Theta}{\partial \xi}\right]\right\} \mathrm{d}\xi = 0, \tag{14}$$

$$\int_0^1 \left\{\frac{\partial \Theta}{\partial F_0} - \frac{\partial}{\partial \xi}\left[a(\Theta) \frac{\partial \Theta}{\partial \xi}\right]\right\} \xi \mathrm{d}\xi = 0. \tag{15}$$

Vyřešením těchto momentových integrálních rovnic se určí parametry $B(F_0)$ a $E(F_0)$ přibližného řešení (13). Přitom se použije okrajových podmínek (9), (10), (11) a navíc, pro určení nového parametru $\xi_0(F_0)$, následujícího postupu:

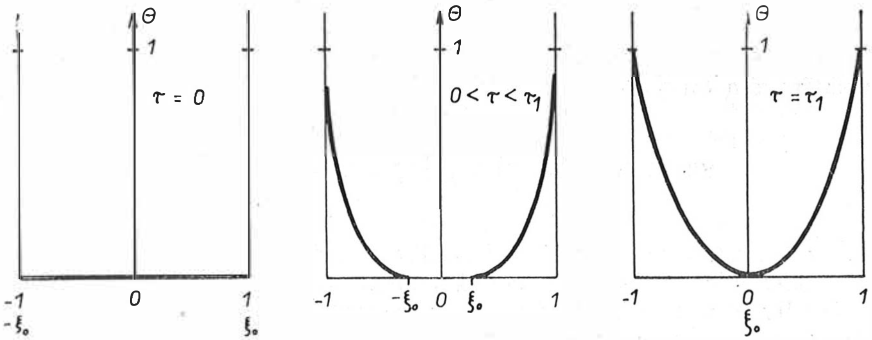
Řešení ve tvaru (13) platí v intervalu $\langle \xi_0, 1 \rangle$, ale v intervalu $\langle 0; \xi_0 \rangle$ je $\Theta(\xi, F_0) = 0$. Hodnota ξ_0 je funkcí F_0 a má tento význam: V určitém čase $\tau = \tau_i < \tau_1$ (neboli při hodnotě $F_0 = F_{0i} < F_{01}$) je

$$\xi_0 = \xi_{0i} = \xi_0(F_{0i}); \qquad \Theta(\xi_{0i}, F_{0i}) = 0$$

a pro rozdělení teploty v desce v tomto okamžiku platí

$$\text{pro} \quad 0 \leqq \xi \leqq \xi_{0i} \text{ je } \Theta(\xi, F_{0i}) = 0, \tag{16}$$

$$\text{pro } \xi_{0i} \leqq \xi \leqq 1 \text{ je } 0 \leqq \Theta(\xi, F_{0i}) \leqq 1, \tag{17}$$



Obr. 1. Pohyb bodu $\xi_0(\tau)$ ke středu desky během časového intervalu $0 \leqq \tau \leqq \tau_1$.

kde $\Theta(\xi\ F_{0i})$ je ve tvaru (13). S rostoucím časem τ (se vzrůstajícím F_0) se hodnota $\xi_0(F_0)$ blíží ke středu desky (k bodu $\xi = 0$), až ho v určitém okamžiku $\tau = \tau_1(F_0 = F_{01})$ dosáhne (tzn. bude platit $\xi_0(F_{01}) = 0$) a v čase $\tau > \tau_1$ bude všude v desce nenulové rozdělení teploty $\Theta > 0$. Podle okrajových podmínek tedy platí

$$F_0 = 0; \qquad \xi_0(0) = 1, \tag{18}$$

$$F_0 = F_{01}; \qquad \xi_0(F_{01}) = 0. \tag{19}$$

Uvedený rozbor je schematicky znázorněn na obr. 1.

Podmínka $\Theta(\xi, F_0)_{\xi=\xi_0} = \Theta(\xi_0) = 0$ platí s určitou předem zvolitelnou nepřesností. Podmínka (18) odpovídá počáteční podmínce (9). Podstatné je tedy nenulové řešení (13) v čase $\langle 0, \tau_1 \rangle$, neboli pro Fourierova čísla z intervalu $\langle 0; F_{01} \rangle$.

Řešením integrálních momentových rovnic (14) a (15) s příslušnými okrajovými podmínkami (18) a (19) je funkce

$$\Theta(\eta, F_0) = \left(\frac{\alpha F_0}{\eta_0^2} - \frac{3}{2}\right)\left(\frac{\eta}{\eta_0}\right)^2 - \left(\frac{\alpha F_0}{\eta_0^2} - \frac{5}{2}\right)\left(\frac{\eta}{\eta_0}\right)^3, \tag{31}$$

kde je zavedeno označení

$$\eta = \xi - \xi_0; \quad \eta_0 = 1 - \xi_0,$$

$$\alpha = 30 \int_0^1 a(\Theta)\, d\Theta.$$

Postup při řešení momentových rovnic je uveden v dodatku A.

Řešení ve tvaru (31) platí obecně pro libovolné $\xi_0 \in \langle 0; 1\rangle$. V dalším výkladu bude nutno výraz (31) upravit pro případ $F_0 = F_{01}$, tedy pro $\xi_0 = 0$; v tomto případě pro proměné η_0 a η platí

$$\eta_0(F_{01}) = 1; \quad \eta = \xi - \xi_0(F_{01}) = \xi$$

a výraz (31) přejde na tvar

$$\Theta(\xi, F_{01}) = \left(\alpha F_{01} - \frac{3}{2}\right) \xi^2 - \left(\alpha F_{01} - \frac{5}{2}\right) \xi^3. \tag{32}$$

Řešení rovnice (7) ve tvaru (32) platí v čase $\tau = \tau_1$ (neboli pro $F_0 = F_{01}$) a v rozměrovém intervalu $0 \leqq \xi \leqq 1$.

STANOVENÍ TEPLOTNÍ VODIVOSTI

Řešení rovnice vedení tepla (7) ve tvaru (32) vyjadřuje rozdělení teploty v desce pouze v jednom časovém okamžiku τ_1 určeném dosažením teplotního rozruchu středu desky. To ovšem nebrání použít výraz (32) k měření součinitele teplotní vodivosti materiálu desky, ale naopak, toto měření podstatně urychluje, protože teplotní rozruch dosáhne středu desky ve velmi krátkém čase, prakticky do 1 minuty (v uvažovaných centimetrových tloušťkách desky).

Nejprve je nutno vyjádřit veličinu α pomocí střední teplotní vodivosti $a_s(T_0, T_w)$ definované vztahem

$$a_s(T_0, T_w) = \frac{1}{T_w - T_0} \int_{T_0}^{T_w} a(T)\, dT. \tag{33}$$

Porovnáním výrazů (29) pro α a (33) pro $a_s(T_0, T_w)$ a použitím transformačních rovnic (6) se dá α vyjádřit ve tvaru:

$$\alpha = \frac{30}{a_w} a_s(T_0, T_w). \tag{34}$$

Použitím tohoto výrazu (34) a definice Fourierova čísla pro čas $\tau = \tau_1$, tj.

$$F_{01} = \frac{a_w \tau_1}{\delta^2},$$

přejde řešení dané výrazem (32) na tvar

$$\Theta(\xi, \tau_1) = \left(\frac{30\, a_s \tau_1}{\delta^2} - \frac{3}{2}\right) \xi^2 - \left(\frac{30\, a_s \tau_1}{\delta^2} - \frac{5}{2}\right) \xi^3, \tag{35}$$

kde je pro stručnost zápisu položeno $a_s \equiv a_s(T_0, T_w)$.

Výraz (35) představuje již vhodnou formu řešení rovnice vedení tepla modifikovanou pro měření střední teplotní vodivosti a_s. Hodnota a_s se dá z rovnice (35) snadno určit, a to současným měřením teploty ve dvou místech: v bodě $\xi_1 = 0$ (pro zjištění času τ_1) a v nějakém druhém vhodném bodě $\xi_2 \in (0; 1)$; např. pro $\xi_2 = \frac{1}{2}$ bude

$$a_s = \left(\frac{T\left(\frac{1}{2}, \tau_1\right) - T_0}{T_w - T_0} + \frac{1}{16} \right) \frac{4\delta^2}{15\tau_1}, \tag{36}$$

kde τ_1 je určeno okamžikem, ve kterém se zjistí odpoutání teploty $T(0, \tau)$ uprostřed desky od hodnoty T_0.

PŘESNOST STANOVENÍ TEPLOTNÍ VODIVOSTI MOMENTOVOU METODOU

Zhodnocení přesnosti uvedené metody bylo provedeno matematickým modelováním, a to tak, že přesné rozdělení teplot v desce bylo namodelováno výpočtem pomocí explicitní metody sítí se součinitelem teplotní vodivosti závislým na teplotě podle vztahu

$$a(T) = m(T + n)^p. \tag{39}$$

Z mnoha možností byl zvolen právě tento tvar závislosti a na T, protože velmi dobře vyhovuje mnoha materiálům. Diferenční rozpis pro síťovou metodu je ve stručnosti uveden v dodatku B.

Pro porovnání rozdělení teplot vypočtené metodou momentů se skutečným namodelovaným rozdělením byly zvoleny proměnné T, τ, ξ (smíšené rozměrové a bezrozměrné proměnné) a pro vyjádření souvislosti $a_s(T_0, T_w)$ s $a(T)$ vztah (33).

Jako konkrétní příklad pro zhodnocení metody byla pro ilustraci zvolena středně kvalitní desková rohož ze skleněných vláken polotloušťky $\delta = 2$ cm s typickým průběhem závislosti součinitele teplotní vodivosti na teplotě ve tvaru

$$a(T) = 1{,}47 \cdot 10^{-12}(T + 300)^{1{,}99}. \tag{42}$$

Pro výpočet rozdělení teploty v desce metodou sítí bylo zvoleno dělení polotloušťky na 6 dílků ($h = 1/3 \cdot 10^{-2}$ m), časový krok $k = 2$ s, a hodnota $a_m = 2{,}31 \cdot 10^{-6}$ m^{2}s^{-1} byla určena ze vztahu (42) (při teplotě 1 000 °C). Kritérium stability (41) je tedy splněno:

$$\frac{k}{h^2} \cdot 2a_m \doteq 0{,}83 < 1.$$

Metodou sítí byla potom vypočtena rozdělení teplot pro 3 různé počáteční teploty

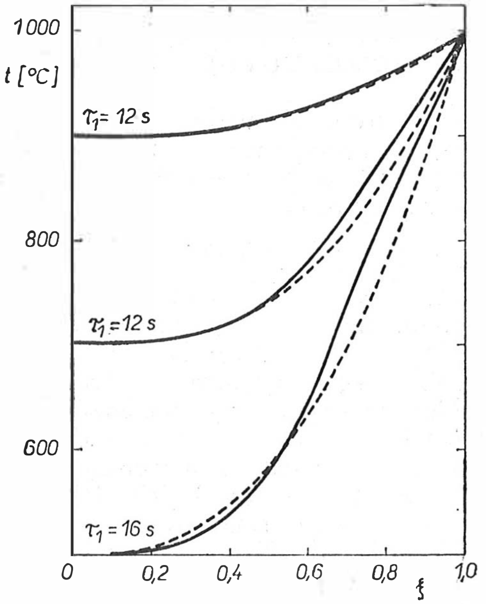
$$T_0 = 900\ °\mathrm{C}; \quad T_0 = 700\ °\mathrm{C}; \quad T_0 = 500\ °\mathrm{C} \tag{43}$$

a pro povrchovou teplotu stěny desky

$$T_w = 1000\ °\mathrm{C}. \tag{44}$$

Do grafu na obr. 2 byla vynesena tato rozdělení odpovídající časům τ_1, ve kterých teploty ve středu desky ($\xi = 0$) dosáhly hodnot uvedených v tab. I, jenž simulují experimentální stanovení změny počáteční teploty T_0 ve středu desky.

Pro výpočet rozdělení teplot v desce metodou momentů bylo nutno nejdříve stanovit příslušné hodnoty $\alpha_s(T_0, T_w)$. Tyto hodnoty byly vypočteny dosazením teplot (43) a (44) a funkce (42) do definičního vztahu (33) a jsou uvedeny ve 4. sloupci tab. I. Potřebné časy byly stanoveny metodou sítí (jedná se o matematický model, tedy hodnoty τ_1 se nezjišťovaly experimentálně) a jsou uvedeny v 5. sloupci tab. I. Pomocí vztahu (35) byla vypočtena příslušná rozdělení teplot a rovněž vynesena do grafu na obr. 2. Hodnoty teplot ve středu desky, vypočtené metodou momentů, jsou pro porovnání uvedeny v tab. I.



Obr. 2. Teplotní rozdělení přes polotloušťku desky v čase $\tau = \tau_1$ určené metodou momentů (čárkovaná křivka) a metodou sítí (plná křivka).

Z grafických závislostí na obr. 2, kde je pro stručnost znázorněna jen jedna polovina desky (rozdělení teplot v intervalu $-1 \leqq \xi \leqq 0$ je symetrické), je ihned patrné, že rozdělení teplot určené metodou sítí a metodou momentů se odlišuje tím více, čím je větší rozdíl teplot $\Delta T = T_w - T_0$. Např. pro $\Delta T = 100$ °C je max. odchylka 4 °C (v bodě $\xi = 0{,}8$), tj. 4 % z rozdílu ΔT, ale pro $\Delta T = 500$ °C už činí tato odchylka 50 °C (v bodě $\xi = 0{,}75$), tj. 10 % z rozdílu ΔT. Přitom časy τ_1 byly stanoveny přibližně, a to v okamžicích, kdy velikost teplotního odpoutání ve středu desky od teploty T_0 byla řádově desetiny procenta. Velmi zajímavý je vlastní průběh obou druhů rozdělení teplot, ze kterého je vidět, že se odpovídající křivky protínají přibližně ve středu polotloušťky desky (tj. v bodě $\xi = \frac{1}{2}$). Tato skutečnost je velmi výhodná pro měření středního koeficientu teplotní vodivosti $a_s(T_0, T_w)$ metodou momentů, volíme-li $\xi_2 = \frac{1}{2}$, jak bylo popsáno v závěru odstavce Stanovení teplotní vodivosti (vztah (36)). Uvedené skutečnosti, názorně plynoucí z grafického vyjádření, lze analyticky vysvětlit tím, že metoda momentů je vlastně určitý druh variační úlohy, a proto pomocí ní lze získat pouze vystředované rozdělení teplot; proto mají odchylky obou rozdělení kladné i záporné hodnoty. Z toho plyne, že obě odpovídající si křivky musí v určitých bodech splývat. Ve vyšetřovaných případech obě křivky prakticky splývají v blízkém okolí bodu $\xi = 0$, protínají se v bodě $\xi = 1$ a v jednom dalším bodě, přibližně v $\xi = \frac{1}{2}$. V tomto srovnání se rozdělení teplot určené metodou sítí považuje za volitelně přesné, podle velikosti kroků k a h.

Tabulka I

Porovnání metody momentů s metodou sítí

Zadané hodnoty				Vypočtené hodnoty					
				metoda sítí			metoda momentů		
T_0 °C	T_w °C	ΔT °C	a_s m^2s^{-1}	τ_1 s	$T(0, \tau_1)$ °C	$T\left(\frac{1}{2}, \tau_1\right)$ °C	$T\left(\frac{1}{2}, \tau_1\right)$ °C	a_{sm} m^2s^{-1}	Δa_s %
900	1 000	100	$2,14 \cdot 10^{-6}$	12	900,5	917,7	917,9	$2,13 \cdot 10^{-6}$	0,5
700	1 000	300	$1,82 \cdot 10^{-6}$	12	700,2	741,0	742,8	$1,77 \cdot 10^{-6}$	2,7
500	1 000	500	$1,54 \cdot 10^{-6}$	16	500,6	580,0	584,4	$1,48 \cdot 10^{-6}$	3,9

Pro úplnost byl proveden výpočet středního součinitele teplotní vodivosti a_{sm} podle vztahu (36) odvozeného momentovou metodou, kam byly dosazeny časy τ_1 a teploty $T(\frac{1}{2}, \tau_1)$ namodelované metodou sítí, čili hodnoty které by bylo možno zjistit pečlivě provedeným experimentem. Takto stanovené hodnoty a_{sm} jsou uvedeny v tab. I, kde jsou v posledním sloupci ještě relativní odchylky Δa_s hodnot a_{sm} od zadaných skutečných hodnot a_s. Již na tomto jednoduchém příkladě se ukazuje, že relativní chyba stanovení a_s metodou momentů je pro praktické případy menší než 3 %, zvláště pro malé rozdíly teplot $\Delta T = T_w - T_0$ do 100 °C je chyba pouze cca 0,5 % a dokonce i pro poměrně velký teplotní interval $\Delta T = 500$ °C dosahuje tato chyba pouze necelých 4 %.

V závěru lze říci, že i když porovnání metody momentů s metodou sítí bylo zde provedeno jen pro určitý materiál a určité teploty, je možno — vzhledem k obecnosti uvedených postupů — očekávat analogické porovnání teplotních průběhů i u jiných podobných látek. Z toho plyne, že i přesnost stanovení středního součinitele teplotní vodivosti a_s se nebude podstatně lišit od výše uvedených mezí. Z teoretického hlediska je tedy zjišťování střední teplotní vodivosti a_s metodou momentů velmi přesné a hlavně rychlé, zvláště pro nevelké teplotní intervaly ΔT do 100 °C.

DODATEK A

Postup při řešení momentových rovnic

Nejdříve se dosadí hraniční podmínka (10), tj. $\Theta\,(1,\,F_0) = 1$, do uvedeného tvaru řešení (13), čímž vznikne rovnost

$$U + V = 1, \tag{20}$$

kde je zavedeno označení

$$U = B\,.\,(1 - \xi_0)^2; \quad V = E\,.\,(1 - \xi_0)^3. \tag{21}$$

Podmínka (20) tedy odpovídá původní podmínce (10).

Nyní se vyřeší rovnice nultého momentu, kde je nutno si uvědomit, že $\Theta(\xi, F_0) = 0$ pro $0 \leqq \xi \leqq \xi_0$, tedy rovnice (14) bude mít tvar

$$I = \int_{\xi_0}^{1} \left\{ \frac{\partial\Theta}{\partial F_0} - \frac{\partial}{\partial\xi}\left[a(\Theta)\frac{\partial\Theta}{\partial\xi}\right]\right\} \mathrm{d}\xi = 0. \tag{22}$$

Integrál I je vhodné rozložit na dva integrály

$$I = I_1 - I_2 = 0, \tag{23}$$

kde

$$I_1 = \int_{\xi_0}^{1} \frac{\partial\Theta}{\partial F_0}\,\mathrm{d}\xi; \qquad I_2 = \int_{\xi_0}^{1} \frac{\partial}{\partial\xi}\left[a(\Theta)\frac{\partial\Theta}{\partial\xi}\right]\mathrm{d}\xi.$$

Funkce $\Theta(\xi, F_0)$ ve tvaru (13) se dosadí do I_1 a I_2 a použitím vztahů (10), (20), (21) se uvedené integrály vyřeší:

$$I_1 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}F_0}\left[\frac{1}{4}(1 - \xi_0)\left(1 + \frac{U}{3}\right)\right] \tag{24}$$

$$I_2 = a(1)\left[1 - \frac{U}{3}\right]\frac{3}{1 - \xi_0}, \tag{25}$$

kde je označeno

$$a(1) \equiv a(\Theta(1, F_0)),$$

protože podle (10) platí, že $\Theta(1, F_0) = 1$. Dosazením (24) a (25) do uvedeného rozkladu (23) vznikne diferenciální rovnice nultého momentu:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}F_0}\left[\left(1 + \frac{U}{3}\right)(1 - \xi_0)\right] = \frac{12}{1 - \xi_0}\left(1 - \frac{U}{3}\right)a(1), \tag{26}$$

Podobně se vyřeší druhá integrální momentová rovnice tak, že se integrál (15) opět rozepíše na dva integrály

$$J = J_1 - J_2 = 0,$$

kde je

$$J_1 = \int_{\xi_0}^{1} \xi\frac{\partial\Theta}{\partial F_0}\,\mathrm{d}\xi; \qquad J_2 = \int_{\xi_0}^{1} \xi\frac{\partial}{\partial\xi}\left[a(\Theta)\frac{\partial\Theta}{\partial\xi}\right]\mathrm{d}\xi.$$

Funkce (13) se dosadí do J_1 a J_2, použijí se vztahy (10), (20), (21), definice bodu ξ_0 (tzn. $\Theta(\xi_0) = 0$) a po několika úpravách se integrály vyřeší a rovnice $J_1 = J_2$ bude mít tvar

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}F_0}\left[(1-\xi_0)\left(1+\frac{U}{3}\right)\frac{1}{4}\right] - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}F_0}\left[(1-\xi_0)^2\left(U+\frac{3}{2}\right)\frac{1}{30}\right] =$$

$$= a(1)\left[\frac{3}{1-\xi_0}\left(1-\frac{U}{3}\right)\right] - \int_0^1 a(\Theta)\,\mathrm{d}\Theta. \qquad (27)$$

Použitím (26), tj. podmínky plynoucí z rovnice nultého momentu, se vztah (27) zjednoduší na konečný tvar diferenciální rovnice prvního momentu:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}F_0}\left[(1-\xi_0)^2\left(U+\frac{3}{2}\right)\right] = 30\int_0^1 a(\Theta)\,\mathrm{d}\Theta. \qquad (28)$$

Pro další výpočty je vhodné zavést nová označení

$$\eta_0 = 1-\xi_0; \quad \alpha = 30\int_0^1 a(\Theta)\,\mathrm{d}\Theta = \text{konst.} \qquad (29)$$

Použitím těchto nových proměnných (29) přejde rovnice (28) na tvar

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}F_0}\left[\eta_0^2\left(U+\frac{3}{2}\right)\right] = \alpha$$

a po integraci

$$\eta_0^2\left(U+\frac{3}{2}\right) = \alpha F_0 + C,$$

kde integrální konstanta C je určena podmínkou (18), tj. $F_0 = 0$, $\xi_0 = 1 \Rightarrow \eta_0 = 0$, a to znamená, že $C = 0$, a tedy platí

$$\eta_0^2\left(U+\frac{3}{2}\right) = \alpha F_0. \qquad (30)$$

Z tohoto výrazu (30) se pomocí vztahů (20) a (21) vyjádří nejdříve funkce U a V a z nich potom parametry B a E:

$$B = \frac{U}{(1-\xi_0)^2} = \frac{\alpha F_0 - \frac{3}{2}\eta_0^2}{\eta_0^4},$$

$$E = \frac{V}{(1-\xi_0)^3} = \frac{1-U}{(1-\xi_0)^3} = \frac{\frac{5}{2}\eta_0^2 - \alpha F_0}{\eta_0^5}.$$

Takto určené parametry B, E se dosadí do tvaru řešení (13), čímž vznikne konečný tvar rozdělení teplot Θ:

$$\Theta(\eta, F_0) = \left(\frac{\alpha F_0}{\eta_0^2} - \frac{3}{2}\right)\left(\frac{\eta}{\eta_0}\right)^2 - \left(\frac{\alpha F_0}{\eta_0^2} - \frac{5}{2}\right)\left(\frac{\eta}{\eta_0}\right)^3. \qquad (31)$$

kde po zjednodušení zápisu byla zavedena nová proměnná

$$\eta = \xi - \xi_0.$$

DODATEK B

Metoda sítí

Diferenciální rovnice vedení tepla (5) byla rozepsána do tvaru diferenční rovnice s časovým krokem k (index j) a rozměrovým krokem h (index i) a po nevelkých úpravách byl stanoven tvar vhodný pro naprogramování do počítače:

$$T_{i+1}^{j} = \frac{k}{h^2}\left[a_{+}^{j-1}\,T_{i+2}^{j-1} + a_{-}^{j-1}\,T_{i}^{j-1} - (a_{+}^{j-1} + a_{-}^{j-1})\,T_{i+1}^{j-1}\right] + T_{i+1}^{j-1}, \tag{37}$$

kde je označeno

$$a_{+}^{j-1} = m\left(\frac{T_{i+1}^{j-1} + T_{i+2}^{j-1}}{2} + n\right)^{p}, \qquad a_{-}^{j-1} = m\left(\frac{T_{i}^{j-1} + T_{i+1}^{j-1}}{2} + n\right)^{p}, \tag{38}$$

přičemž teplotní závislost koeficientu teplotní vodivosti byla v tomto případě volena ve tvaru

$$a(T) = m(T + n)^{p} \tag{39}$$

s materiálovými konstantami m, n, p. Tvar (39) velmi dobře vyhovuje mnoha materiálům. Bylo by možné použít i jiných závislostí $a(T)$, např. exponenciálních, což ale ve studované úloze není podstatné. Stabilitu uvedeného rozpisu (37) zaručuje podmínka

$$\frac{k}{h^2}(a_{+} + a_{-}) < 1, \tag{40}$$

která musí být dodržena při volbě velikosti kroků k a h. Pro praktické výpočty byla použita podmínka (40) ve tvaru

$$\frac{k}{h^2}\,2a_m < 1, \tag{41}$$

kde a_m je předem odhadnutá maximální hodnota $a(T)$ na vyšetřovaném teplotním intervalu. Prostorové kroky velikosti h začínají v místě $x = \delta$ a končí v místě $x = 0$. Okrajová podmínka (4), která vyjadřuje symetričnost úlohy, se realizuje přidáním dalšího kroku pro $x = -h$ s teplotou $T_{N+1} = T_{N-1}$, kde T_N je teplota v místě $x = 0$.

Pro dále uvedené výpočty byla rovnice (37) naprogramována na stolním kalkulátoru HP 9100B s použitím vnější přídavné paměti HP 9101A. Uvedený případ zároveň ukazuje, že síťové metody řešení jednorozměrné diferenciální rovnice vedení tepla nevyžadují v nepříliš složitých případech použití velkých počítačů, jestliže se provede úsporné programování na stolních kalkulátorech.

Literatura

[1] Krempaský, J.: *Meranie termofyzikálnych veličín*, SAV, Bratislava 1969.
[2] Informativní přehled SVÚS, *18* [1] (1975).
[3] Carslaw, H. S., Jaeger, J. C.: *Conduction of Heat in Solids*, London 1948.
[4] Rohsenow W. M., Hartnett J. P.: *Handbook of Heat Transfer*, 1. vyd., str. 3—52. McGraw-Hill, New York 1973.
[5] Fujita H.: Mem. Coll. Agric. Kyoto Univ. *59*, 31 (1951).

НЕСТАЦИОНАРНАЯ МЕТОДА МОМЕНТОВ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТА ТЕМПЕРАТУРОПРОВОДНОСТИ

Петр Шилл

Государственный научно-исследовательский институт стекла, Градец Кралове

Работа отведена модельным математическим решениям распределения температуры в одноразмерном финитном теле при краевых условиях первого рода. Приводится сравнение одной модификации интегрального метода моментов с дискретным разностным методом и предлагаются возможности применения для контактного измерения коэффициента температуропроводности изолирующих материалов.

Для быстрого измерения среднего коэффициента температуропроводности выводится следующее отношение

$$a_s(T_0, T_w) = \left(\frac{T(\frac{1}{2}, \tau_1) - T_0}{T_w - T_0} + \frac{1}{16}\right) \frac{4\delta^2}{15\tau_1},$$

где T_0 и T_w постоянная начальная и поверхностная температура, δ — полутолщина пластины, $T(1/2, \tau_1)$ — температура в точке $x = \frac{\delta}{2}$ и τ_1 — время, в течение которого температура в середине пластины начинает отклоняться от начальной температуры T_0 (в точке $x = 0$).

Рис. 1. Движение точки $\xi_0(\tau)$ к середине пластины в интервале времени $0 \leqq \tau \leqq \tau_1$.
Рис. 2. Распределение температуры через полутолщину пластины во время $\tau = \tau_1$ определенное методом моментов (штриховая кривая) и разностным методом (полная кривая).

NON-STATIONARY MOMENT METHOD OF THERMAL DIFFUSIVITY DETERMINATION

Petr Schill

State Glass Research Institute, Hradec Králové

The paper deals with mathematical models of temperature distribution in a one-dimensional finite body at boundary conditions of prescribed surface temperature. A comparison is made of the modified integral moment method with the network discrete method and applications are suggested for contact measurement of thermal diffusivity of insulating materials.

The following relationship was derived for the purpose of rapid measurement of mean thermal diffusivity $a_s(T_0, T_w)$:

$$a_s(T_0, T_w) = \left(\frac{T(1/2, \tau_1) - T_0}{T_w - T_0} + \frac{1}{16}\right) \frac{4\delta^2}{15\,\tau_1},$$

where T_0 and T_w are constant initial and surface temperatures respectively, δ is half-thickness of the plate, $T(1/2, \tau_1)$ is temperature at point $x = \frac{\delta}{2}$ and τ_1 is the moment at which the temperature at the plate center (point $x = 0$) begings to change from the initial value T_0.

Fig. 1. Movement of point $\xi_0(\tau)$ towards the plate center during time interval $0 \leqq \tau \leqq \tau_1$.
Fig. 2. Temperature distribution over the plate half-thickness at time $\tau = \tau_1$ determined by the moment method (dashed curve) and by the finite differences method (solid curve).