

PODOBNOST ELEKTROTERMOMECHANICKÝCH PROCESŮ PŘI MODELOVÁNÍ TAVENÍ SKLA

PAVEL HERMA

Společná laboratoř silikátů ČSAV a VŠCHT, 116 28 Praha, Suchbátarova 5

Došl. 28. 8. 1979

Jsou diskutovány podmínky podobnosti mezi modelem a dílem v případě elektrického tavení skla, jestliže transportní vlastnosti (viskozita, teplotní vodivost, elektrická vodivost): a) jsou nezávislé na teplotě, b) závisí na teplotě lineárně, c) závisí na teplotě podle Arrheniova vztahu. V případě b) musí být měřítko pro teplotní koeficient příslušné transportní vlastnosti rovno převrácené hodnotě měřítka pro referenční teplotní rozdíl a v případě c) musí být měřítko pro referenční teplotu a referenční teplotní rozdíl identická a rovná měřítku pro charakteristickou teplotu (aktivní energii) příslušné transportní vlastnosti.

ÚVOD

Ačkoli literatura o fyzikálním modelování sklářských pecí je velmi rozsáhlá, exaktní formulace podmínek podobnosti je v ní spíše výjimkou než pravidlem. Jednou z těchto výjimek je Banzalova práce [1], v níž jsou diskutovány podmínky podobnosti za předpokladu konstantních transportních koeficientů. Transportní vlastnosti skla však silně závisí na teplotě, a proto Staněk [2] klade požadavek podobnosti jejich teplotních závislostí pro sklo a modelovou kapalinu. Adekvátní způsob zbezrozměnění diferenciálních rovnic pro rychlostní, teplotní a elektrické pole je běžný v literatuře o matematickém modelování. Tak Wright a Rawson [3] volí bezrozměrnou rychlost $\bar{\mathbf{v}} = (L/a) \mathbf{v}$, což v souladu se skutečnou situací při tavení skla implikuje, že konvekční a kondukční člen v rovnici energie jsou téhož řádu. Současně, podobně jako Banzal [1], ukazují, že při vysokém Prandtlově čísle lze zanedbat setrvačný člen v rovnici pohybu, která se tím zlinearizuje. Touto linearizací je pak mj. zabezpečen předpoklad superpozice volné a nucené konvekce, který používají McConnell a Goodson [4]. Mase a Sasagawa [5] volí stejný způsob škálování jako Wright a Rawson [3], ale navíc uvažují závislost transportních vlastností na teplotě. V bezrozměrných rovnicích ji vyjadřují pomocí bezrozměrných transportních funkcí bezrozměrné teploty. Tytéž výchozí rovnice uvádějí Hayakawa aj. [6] a aplikují je na matematický i fyzikální model. Bohužel však neuvádějí žádné bližší podrobnosti.

Adekvátní fyzikální modelování musí být nepochybně založeno na správné volbě invariantů podobnosti, mezi nimiž musí být zahrnuty i parametry teplotních závislostí transportních koeficientů. Cílem tohoto příspěvku je formulovat požadavky na fyzikální model a modelovou kapalinu v případě kombinované volné a nucené konvekce v konduktivně nebo odporově vyhřívané kapalině s teplotně závislými transportními vlastnostmi.

ZÁKLADNÍ VZTAHY

Sklovinu budeme považovat za Navierovu—Stokesovu—Fourierovu—Ohmovu nestlačitelnou tekutinu s hustotou lineárně závislou na teplotě, která nemá dielektrické ani magnetické vlastnosti a je lokálně elektricky neutrální. Budeme

předpokládat platnost Boussinesqovy aproximace a přenos tepla zářením vyjádříme pomocí efektivní tepelné vodivosti (Rosselandova aproximace). Základní rovnice pro pole rychlosti, teploty a elektrického potenciálu potom mají tvar

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad (1)$$

$$\varrho \dot{\mathbf{v}} = -\operatorname{grad} p + 2 \operatorname{div} (\mu(T) \mathbf{D}) - \varrho_r \beta (T - T_r) \mathbf{g}, \quad (2)$$

$$\varrho c T' = \operatorname{div} (\lambda(T) \operatorname{grad} T) + \kappa(T) (\operatorname{grad} \varphi)^2, \quad (3)$$

$$\operatorname{div} (\kappa(T) \operatorname{grad} \varphi) = 0, \quad (4)$$

kde $\mathbf{v}$ je rychlost pohybu, T teplota, φ elektrický potenciál, $\varrho = \varrho_r (1 + \beta (T - T_r))$ je hustota, ϱ_r je hustota při referenční teplotě T_r , β je expanzní koeficient, p tlak spojený s pohybem (tj. odchylka tlaku od hydrostatického tlaku), $\mathbf{D}$ tenzor rychlosti deformace, $\mathbf{g}$ gravitační zrychlení, μ dynamická viskozita, λ tepelná vodivost, κ elektrická vodivost a c specifické teplo; grad a div značí prostorový gradient a divergenci, tečka nad symbolem materiálovou derivaci podle času, tj. $T' = \partial_t T + \mathbf{v} \cdot \operatorname{grad} T$.

Rovnice (1) až (4) převedeme na bezrozměrný tvar pomocí transformací

$$\bar{\mathbf{v}} = (L/a) \mathbf{v}, \quad \bar{T} = (T - T_r)/\Delta T, \quad \bar{\varphi} = \varphi/\Phi, \quad \bar{p} = (L^2/\mu_r a_r) p, \quad \overline{\operatorname{grad}} = L \operatorname{grad}, \\ \overline{\operatorname{div}} = L \operatorname{div}, \quad \partial \bar{t} = (L^2/a_r) \partial_t, \quad \bar{\nu} = \nu/\nu_r, \quad \bar{a} = a/a_r, \quad \bar{\lambda} = \lambda/\lambda_r, \quad \bar{\kappa} = \kappa/\kappa_r, \quad (5)$$

kde $a = \lambda/\varrho c$ je teplotní vodivost, ν je kinematická viskozita, L je referenční délka, ΔT referenční teplotní rozdíl, Φ referenční rozdíl potenciálů, μ_r , ν_r , λ_r a κ_r jsou hodnoty příslušných vlastností při referenční teplotě a pruh nad symbolem označuje bezrozměrnou veličinu:

$$\overline{\operatorname{div}} \bar{\mathbf{v}} = 0, \quad (6)$$

$$\operatorname{Pr}^{-1} \dot{\bar{\mathbf{v}}} = -\overline{\operatorname{grad}} \bar{p} + 2 \overline{\operatorname{div}} (\bar{\nu}(\bar{T}) \mathbf{D}) - \operatorname{Ra} \mathbf{k} \bar{T}, \quad (7)$$

$$\bar{T}' = \overline{\operatorname{div}} (\bar{a}(\bar{T}) \overline{\operatorname{grad}} \bar{T}) + \operatorname{Sn} \bar{\kappa}(\bar{T}) (\overline{\operatorname{grad}} \bar{\varphi})^2, \quad (8)$$

$$\overline{\operatorname{div}} (\bar{\kappa}(\bar{T}) \overline{\operatorname{grad}} \bar{\varphi}) = 0. \quad (9)$$

Tyto rovnice obsahují tři bezrozměrné parametry, totiž Prandtlovo, Rayleighovo a výkonové číslo**)

$$\operatorname{Pr} = \nu_r/a_r, \quad \operatorname{Ra} = \beta \Delta T g L^3/\nu_r a_r, \quad \operatorname{Po} = \kappa_r \Phi^2/\lambda_r \Delta T; \quad (10)$$

$\mathbf{k}$ je jednotkový vektor ve svislém směru. V rovnici energie (8) je konvekční člen téhož řádu jako kondukční člen, což odpovídá situaci při tavení skla. Protože Prandtlovo číslo sklovin je vysoké, není setrvačný člen v rovnici pohybu (7) významný a lze jej zanedbat. Rovnice (7) se tím zlinearizuje a zmenší se počet nezávislých parametrů.

*) Problémy s definováním efektivní tepelné vodivosti lze obejít, má-li rovnice (3) tvar:

$$\varrho c T' = -\operatorname{div} (\mathbf{q}) + \kappa(T) (\operatorname{grad} \varphi)^2. \quad (3a)$$

**) O parametru Po v případě třífázového elektrického pole viz [7].

***). Zavedením $\bar{\mathbf{q}} = (L^2/QH)\mathbf{q}$, kde H je teplo k získání 1 kg skloviny o teplotě tavení z ekvivalentního množství vsázky o teplotě zakládání, dostaneme s použitím (3) místo (3a) — viz [9]

$$\operatorname{Ra} = \varrho_r \beta (\Delta T)^2 g L^4/\nu_r QH, \quad \operatorname{Po} = \kappa_r \Phi^2 L/QH. \quad (10a)$$

TŘÍDY PODOBNOSTI A MĚŘÍTKA

Systémy, v nichž probíhá elektrotermomechanický proces, který se řídí rovnici (6) až (9), jsou si podobné (patří do téže podobnostní třídy) právě tehdy, když

1. jsou si podobné geometricky,
2. mají identické parametry okrajových podmínek,
3. mají identické parametry Pr , Ra a Po (popř. v případě plíživého proudění pouze Ra a Po),
4. mají identické bezrozměrné transportní funkce bezrozměrné teploty, tj. $\bar{v}(T)$, $\bar{a}(T)$ a $\bar{\kappa}(T)$.

V pojmech bezrozměrných veličin jsou podobné systémy identické, avšak z aplikačního hlediska je jeden prvek dané podobnostní třídy preferován. Tento reprezentativní prvek se nazývá dílo, ostatní prvky jsou modely. Přepočet referenčních veličin mezi modelem a dílem se provádí pomocí měřítek. Měřítko budeme označovat symbolem pro danou veličinu s indexem C , např. $A_C = A_M/A_W$ je měřítko pro veličinu A (index M značí model a index W dílo). Podmínku 3) lze pomocí měřítek vyjádřit ve tvaru

$$Pr_C = Ra_C = Po_C = 1, \quad (11)$$

neboli

$$a_{rC} = v_{rC}, \quad \beta_C \Delta T_C L_C^3 = v_{rC} a_{rC}, \quad \kappa_{rC} \Phi_C^2 = \lambda_{rC} \Delta T_C, \quad (12)$$

neboť $g_C = 1$.

Protože v_r , a_r a κ_r jsou funkcí T_r , představují vztahy (12) vazby mezi měřítky L_C , T_{rC} , ΔT_C a Φ_C . Další omezující podmínky plynou z požadavku identity bezrozměrných transportních funkcí.

DŮSLEDKY IDENTITY BEZROZMĚRNÝCH TRANSPORTNÍCH FUNKCÍ

Nechť f je transportní vlastnost. Budeme uvažovat tři případy závislosti této transportní vlastnosti na teplotě:

- a) transportní vlastnost je konstantní, tj. $f = f_r$,
- b) transportní vlastnost je lineární funkcí teploty, tj. $f = f_r (1 + \eta_f (T - T_r))$, kde η_f je teplotní koeficient transportní vlastnosti f ,
- c) transportní vlastnost závisí na teplotě podle Arrheniova vztahu $f = f_0 \exp(\Theta_f/T)$, kde f_0 a Θ_f jsou konstanty; Θ_f je charakteristická teplota skloviny pro transportní vlastnost f (často používanou veličinou je tzv. aktivační energie $E_f = \Theta_f R$, kde R je univerzální plynová konstanta).

V případě a) je $\bar{f} = 1$, takže identita bezrozměrné transportní funkce je vždy zajištěna. V případě b) je $(\bar{f} - 1) \bar{T} = \eta_{fM} \Delta T_M = \eta_{fW} \Delta T_W$, odkud plyne, že

$$\eta_{fC} \Delta T_C = 1. \quad (13)$$

Nutnou podmínkou pro podobnost modelu a díla je v případě b) splnění vztahu (13), podle něhož měřítko teplotních rozdílů musí být rovno reciproké hodnotě měřítka teplotních koeficientů příslušné transportní vlastnosti. Důsledkem vztahu (13) je, že jsou-li všechny transportní vlastnosti lineární funkcí teploty, pak

měřítka jejich teplotních koeficientů musí být identická. To je poměrně přísný požadavek na modelovou kapalinu.

V případě c) má bezrozměrný Arrheniův vztah tvar

$$\begin{aligned} -\ln f &= (\Theta_f/T_r)_M / (1 + (T_r/\Delta T)_M \bar{T}^{-1}) = \\ &= (\Theta_f/T_r)_W / (1 + (T_r/\Delta T)_W \bar{T}^{-1}). \end{aligned} \quad (14)$$

Funkce $f(\bar{T})$ je identická pro model a dílo právě tehdy, když

$$(\Theta_f/T_r)_M = (\Theta_f/T_r)_W \text{ a } (T_r/\Delta T)_M = (T_r/\Delta T)_W,$$

odkud plyne, že

$$\Theta_{fC} = \Delta T_C = T_{rC}. \quad (15)$$

Nutnou podmínkou pro podobnost modelu a díla v případě c) je identita měřítek pro charakteristickou teplotu, referenční teplotu a referenční teplotní rozdíl. Chovají-li se všechny transportní vlastnosti arrheniovsky, pak $\Theta_{rC} = \Theta_{aC} = \Theta_{\kappa C} = \Delta T_C = T_{rC}$. Požadavky na modelovou kapalinu jsou opět velmi přísné, protože měřítka charakteristických teplot musí být táž pro všechny transportní funkce.

Jsou možné i kombinované případy, např. viskozita a elektrická vodivost závisí na teplotě podle Arrheniova vztahu a teplotní vodivost závisí na teplotě lineárně. Příslušné teplotní koeficienty jsou ovšem vždy svázány s měřítkem referenčních teplotních rozdílů.

KONSTRUKCE MODELU A VÝBĚR KAPALINY

U modelových kapalin máme možnost měnit v určitých mezích šest koeficientů, tj. tři koeficienty f_r , resp. f_0 a tři koeficienty η_f , resp. Θ_f . Naším cílem je najít takovou modelovou kapalinu, aby co nejlépe vyhovovala vztahům (13) resp. (15) a přitom abychom ze vztahů (12)₂ a (12)₃ dostali příznivá měřítka délek a elektrických potenciálů. Současně musí být měřítka pro referenční teploty a teplotní rozdíly taková, aby byla zajištěna příznivá pracovní teplota modelu a příznivý teplotní rozsah. Není jistě třeba podotýkat, že modelová kapalina má plnit řadu dalších požadavků na těkavost, průzračnost, toxicitu apod.

ODBĚR, ELEKTRICKÝ PŘÍKON A ČAS

Důležitým parametrem je celkový průtok pecí Q . Je-li $Pr > 1$, takže platí princip superpozice rychlostí, je poměr průtoku nucenou a volnou konvekci přes ekvivalentní plochy na modelu a díle týž. Pro měřítka rychlostí vzhledem k (5)₁ máme $U_C = a_{rC}/L_C$, takže měřítka odběru je

$$Q_C = q_{rC} U_C L_C^2 = q_{rC} L a_{rC}. \quad (16)$$

Je zřejmé, že měřítka pro celkový proud protékající pecí je $I_C = \kappa_{rC} \Phi_C L_C$ a pro celkový elektrický příkon $W_C = \kappa_{rC} \Phi_C^2 L_C$.

U dynamických experimentů (viz (8)) je třeba mít také měřítka pro čas. Podle (5)₇ $t_C = L_C^2/a_{rC}$.

DISKUSE

První modelové studie nepřihlížely k energetické stránce procesu a soustředily se pouze na odběrový proud. Vycházely z Navierovy—Stokesovy rovnice ve tvaru

$$\rho \dot{\mathbf{v}} = -\text{grad } p + 2 \text{ div } (\mu \mathbf{D}) + \rho \mathbf{g}. \quad (17)$$

Referenční rychlost U je dána odběrem skloviny z pece, takže místo vztahů (5) je pro rychlost, časovou derivaci a tlak možno použít transformace: $\bar{\mathbf{v}} = \mathbf{v}/U$, $\partial_{\bar{t}} = (L/U) \partial_t$ a $\bar{p} = (L/\mu U) p$. Pro jednoduchost budeme ρ a μ považovat za konstanty. Bezrozměrný tvar rovnice (17) je

$$\text{Re } \dot{\bar{\mathbf{v}}} = -\text{grad } \bar{p} + 2 \text{ div } \bar{\mathbf{D}} + N \mathbf{k}, \quad (18)$$

kde $\text{Re} = LU/\nu$ je Reynoldsovo číslo a $N = Ga/\text{Re} = L^2 g/\nu U$. Požadavek na identitu bezrozměrných parametrů vede ke vztahům pro měřítka:

$$L_C U_C = \nu_C, \quad L_C^2 = \nu_C U_C, \quad (19)$$

kteří jsou ekvivalentní vztahům často užívaným pro nastavení měříték viskozit a rychlostí [2]:

$$\nu_C = L_C^{3/2}, \quad U_C = L_C^{1/2}. \quad (20)$$

Měřítka pro odběr a čas jsou: $Q_C = U_C L_C^2 = L_C^{5/2}$ a $t_C = L_C^{1/2}$.

Je-li $\text{Re} < 1$, pak stačí vyhovět pouze požadavku (19)₂, takže máme o stupeň volnosti navíc. Volíme-li geometrické a viskozitní měřítko libovolně, pak $U_C = L_C^2/\nu_C$, $Q_C = L_C^4/\nu_C$ a $t_C = \nu_C/L_C$.

Pro modely přihlížející k energetické stránce provozu pece není tento způsob vhodný, protože zanedbává vztakové (cirkulační) proudění. Podobnost přenosu energie (a cirkulačních proudů) zajišťují identity (12). Nastavení odběru pak plyne z požadavku, že poměr odběrové a cirkulační rychlosti musí být na modelu i díle týž — viz rovnice (16).*)

Identita bezrozměrných transportních funkcí představuje další krok ve zpřesnění podobnosti modelu a díla. Poměrně snadno lze dodržet identity funkcí $\bar{\nu}(\bar{T})$ a $\bar{\kappa}(\bar{T})$. Vzhledem k odlišnému mechanismu tepelné vodivosti při vysokých a nízkých teplotách nebude pravděpodobně možné nalézt kapalinu, jejíž funkce $\bar{\alpha}(\bar{T})$ by byla stejná jako u skloviny. Zdá se, že tento nedostatek nemá příliš velkou váhu. Přísněji je však nutno dodržovat požadavek identity $\bar{\kappa}(\bar{T})$, protože elektrická vodivost souvisí s rozdělením energie ve sklovině a se stabilitou.

ZÁVĚR

Pro modelování rychlostního, teplotního a elektrického pole ve sklovině stačí zachovat identitu Rayleighova a Staňkova čísla a identity funkcí $\bar{\nu}(\bar{T})$, $\bar{\alpha}(\bar{T})$ a $\bar{\kappa}(\bar{T})$. V praxi to znamená, že při Arrheniovském chování transportních vlastností by měly být splněny rovnosti $\Theta_{rC} = \Theta_{aC} = \Theta_{\kappa C} = \Delta T_C = T_{rC}$. Geometrické měřítko je potom určeno vztahem $L_C = (\nu_{rC} \alpha_{rC} / \beta_C T_{rC})^{1/3}$ a měřítko pro rozdíl elektrických potenciálů $\Phi_C = (\lambda_{rC} T_{rC} / \kappa_{rC})^{1/2}$.

*) Praxe ukazuje [10], že (16) může vést k nerealistickému odhadu; realističtější měřítko poskytuje (3a): $U_C = Q_C H_C / L_C^2 c_{pC} \Delta T_C$, kde Q_C je dáno a priori.

Literatura

- [1] Banzal B.: *Glass Ind.* 57, [12] 28 (1976).
- [2] Staněk J., *Electric Melting of Glass*, s. 149. Elsevier, Amsterdam—Oxford—New York 1977.
- [3] Wright S., Rawson H.: *Glass Technol.* 14, 42 (1973)
- [4] McConnell R. R., Goodson R. E.: *Glass Technol.* 20, 100 (1979).
- [5] Mase H., Sasagawa Y. v knize: *Automatic Control in Glass, IFAC Symposium*, s. 93. Lafayette, Indiana 1973.
- [6] Hayakawa M., Mishima M., Kato T., Takahashi K. ve sborníku: *Proc. XIth International Congress on Glass*, s. 33, 1977.
- [7] Němeček M.: *Sklář a keram.* 28, 297 (1978).
- [8] Sanderud I., Pøhner F., Halmø T., Jonsson L.: *Glass Technol.* 16, 39 (1975).
- [9] Hrma P.: ve skriptech *Continuous Glassmaking pro Letní školu o kontinuální výrobě skla Cleveland 1980*.
- [10] Kasa S., Lisý A.: osobní sdělení.

ПОДОБНОСТЬ ЭЛЕКТРО-ТЕРМО-МЕХАНИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ ПРИ МОДЕЛИРОВАНИИ СТЕКЛОВАРЕНИЯ

Павел Грма

Общая лаборатория силикатов ЧСАН и ХТИ, Прага

В предлагаемой статье рассматривается физическое моделирование процессов, протекающих по дифференциальным уравнениям (1)—(4), которые с помощью трансформаций (5) переходят в уравнения (6)—(9), содержащие три безразмерные параметра (10) и три безразмерные транспортные функции, $\bar{v}(T)$, $\bar{x}(T)$ и $\bar{z}(T)$. Для масштабов (т. е. отношение сопоставительной величины на модели и в процессе; он обозначен с помощью C , напр. $L_c = L_M/L_W$ является масштабом длины) справедливы отношения (12), которые являются результатом идентичности параметров (10) и (13) (в том случае, если зависят транспортные свойства от температуры линейно, т. е. $f = f_r[1 + \eta(T - T_r)]$, где f — транспортное свойство), или (15)* в том случае, если справедливо отношение Аррениуса $f = f_0 \exp[\Theta_r(T)]$. Отношения (13) и (15) связывают масштабы температурных коэффициентов для транспортных свойств с масштабом для сопоставительной температурной разности или также для сопоставительной температуры. При конструировании физической модели следует использовать такую модельную жидкость, чтобы на основании отношений (12), (13) и (15) можно было получать экспериментально допустимые масштабы для сопоставительных длины, температуры, температурную разность и разность электрических потенциалов. Отношения для масштаба отбора (oc), общей потребляемой электрической мощности (W_c) и времени (t_c) приводятся в отделе 6.

[THE SIMILARITY OF ELECTRO-THERMO-MECHANICAL PROCESSES IN MODELLING OF GLASS MELTING

Pavel Hrma

Joint Laboratory of the Technology of Silicates, Czechoslovak Academy of Sciences and Institute of Chemical Technology, Prague

The similarity conditions are derived from the dimensionless equations (6) to (9) which depend on three dimensionless parameters (10) and three dimensionless transport functions $\bar{v}(T)$, $\bar{x}(T)$, and $\bar{z}(T)$. These parameters and functions must be equal in similar systems. This requirement leads to the relations (10) and (13) (linear transport functions) or (15) (Arrhenian transport functions) which must be satisfied by the scales for length, temperature, temperature difference, temperature coefficients, and electric potential difference (equations (13) and (15) relate the scales of temperature and temperature difference to the scales for temperature coefficients of transport functions). The model design, model operation, and model liquid should satisfy the similarity requirements as close as possible. The relations for the throughput scale, total electric input scale and time scale are given in Sect. 6.

Note added in proof: Probably the best matching of a model with work is reached using [10a] — see [9] for more details.