Silikáty XXIV, s. 35—46 (1980)

DVOJROZMĚRNÝ MATEMATICKÝ MODEL CELOELEKTRICKY OTÁPĚNÉ SKLÁŘSKÉ VANY

MIROSLAV SKŘIVAN, JAROSLAV ŠTEFAN

Státní výzkumný ústav sklářský, Škroupova 957, 501 92 Hradec Králové

Došlo 10. 5. 1978

Pro studium fyzikálních polí ve sklovině je popsán numerický výpočet rozložení elektrického potenciálu, Jouleova elektrického výkonu, přenosu energie a rozložení teplot ve sklovině i ve stěnách pece a řešení pohybových rovnic. Je poukázáno na otázky stability a konvergence jednotlivých algoritmů.

POPIS SKLÁŘSKÉ VANY MATEMATICKÝM MODELEM

Experimentální prověření teplotního pole přímo na sklářské vaně v provozu je velmi náročnou a rozhodně ne levnou záležitostí. Proměření pole rychlostí je pak ještě obtížnější. Je zřejmé, že využít přímých provozních měření na agregátech, navíc s cílem poznání vlivu velikosti průtoku a zobecnění těchto závislostí, je úlohou nereálnou. Při fyzikálním modelování nelze aplikovat zákony podobnosti k řešení problému přenosu energie ve sklovině.

Analytické řešení proudění v průtoku studoval např. F. W. Preston, I. Peyches, A. Naruse [1], [2]. Podařilo se dokázat, že vytvoření zpětného proudění průtokem je výsledkem přirozeného proudění vlivem rozdílu měrné hmotnosti v pracovní a tavicí části. Eliminací tlakových ztrát [3] a uvažováním proměnné viskozity ve vertikálním směru se podařilo dále přiblížit analytický popis reálnému průtoku. Tento analytický popis průtoku však není schopen popsat problém proudění v jeho složitých vztazích k přenosu energie a zůstává vázán na znalost středních hodnot teplot v obou částech pece.

Matematické modelování umožňuje řešit uvedené problémy na kvalitativně vyšší úrovni. Vyšší kvalita tohoto přístupu spočívá v možnosti objektivněji posoudit pecní agregát komplexně z hlediska jeho činnosti a faktorů, které jeho provoz ovlivňují. Matematickými modely lze simulovat i provoz nerealizovaných agregátů a provoz v extrémních podmínkách, což je vyloučeno u metod empirických.

Možnosti matematického modelování jsou omezeny ze dvou stran: jednak kvalitou dostupné výpočetní techniky a jednak neúplnými znalostmi okrajových podmínek a fyzikálně chemických procesů probíhajících při tavení skla.

Volba matematického modelu závisí kromě cíle jeho použití i na dalších okolnostech, např. na poznatcích o průběhu procesu a možnosti jeho dostatečně precizní matematické formulace, na možnosti řešení rovnic výpočetním algoritmem popisujícím technologický proces systémem matematických vztahů určených pro zpracování na číslicovém počítači, na programátorských možnostech, na časové a finanční náročnosti řešení a v neposlední řadě i na možnosti realizace na dostupné výpočetní technice.

Z analýzy vyplynul jako nejvhodnější model deterministický, s možností postupného doplnění o experimentálně získané údaje týkající se především popisu čeření a homogenizace, s cílem vytvořit pokud možno objektivní nástroj pro posouzení kvality technologického procesu.

Daný matematický model a uvedené aplikační výpočty jsou užity na řezu sklářskou kontinuální vanou o výkonu 1 t/24 h, celoelektricky otápěnou jednofázovým zdrojem střídavého proudu se 4 páry horizontálních elektrod [9].

V podélném řezu vany je tepelný tok ve sklovině rozdělen nerovnoměrně vlivem uspořádání elektrod, nestejnoměrně rozdělené je z toho důvodu i teplotní pole. Z takto vzniklých rozdílů v měrné hmotnosti skloviny dochází k relativně intenzívnímu pohybu skloviny přirozeným prouděním.

Dále ještě dochází k vynucenému pohybu skloviny vlivem kmene zakládaného na hladinu v tavicí části a odběru skloviny z pracovní části vany.

Numerické metody užité pro výpočet teplotních a rychlostních polí vycházejí ze ze soustavy parciálních diferenciálních rovnic vesměs nelineárních a navíc s funkcionály hledaných funkcí na pravé straně. Přestože vyžadují užití komplikovaného výpočetního iteračního postupu, vedou ke stabilnímu a konvergentnímu řešení.

Výsledky výpočtu fyzikálních polí získané matematickým počítačovým simulačním modelem budou užity k analýze vlivu změny výšky průtoku na provozní parametry vany a budou hledány zákonitosti, které umožní návrh průtoku u vany s velkým tavicím výkonem při malé korozi zdiva průtoku [8].

ZÁKLADNÍ ROVNICE POPISUJÍCÍ PROUDĚNÍ SKLOVINY A PŘENOS ENERGIE VE VANĚ

Nestacionární proudění skloviny za současného přenosu energie v dvojrozměrném souřadnicovém systému, umístěném v podélné rovině symetrie vany a při splnění z toho vyplývajících předpokladů, lze popsat soustavou parciálních diferenciálních rovnic:

rovnicí energie

$$\varrho c(DT/D\tau) = \operatorname{div}\left((\lambda_{ef} \operatorname{grad} T) + q_E\right), \tag{1}$$

rovnicí pole Jouleova elektrického výkonu

$$\operatorname{div} q_E = \gamma_E \sqrt{(\partial V/\partial x)^2 + (\partial V/\partial y)^2}, \tag{2}$$

rovnicí elektrického potenciálu

$$\operatorname{div}(\gamma_E \operatorname{grad} V) = 0, \tag{3}$$

rovnicí kontinuity

$$(\partial u/\partial x) + (\partial v/\partial y) = 0, \tag{4}$$

pohybovými rovnicemi

$$\varrho \frac{\mathrm{D}u}{\mathrm{D}\tau} = -\frac{\partial p}{\partial x} + 2\frac{\partial}{\partial x}\left(\eta \frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\eta\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\right), \tag{5}$$

$$\varrho \frac{Dv}{D\tau} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\eta\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\right) + 2\frac{\partial}{\partial y}\left(\eta\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)\right) + g\varrho. \tag{6}$$

Sklovinu lze v celém rozsahu modelovaných teplot považovat za newtonskou kapalinu, pohyb skloviny je velmi pomalý a disipační člen v rovnici energie je zanedbatelný.

Pro vyjádření tečného napětí u stěny zavádíme obvyklou Boussinesqovu aproximaci. Přenos tepla zářením byl vyjádřen obvyklou hodnotou efektivního součinitele tepelné vodivosti, jak plyne z Rosselandovy aproximace:

$$\lambda_{ef} = \lambda_m + \frac{4\pi}{3} \int_0^\infty \gamma_\lambda^{-1}(\mathrm{T}) \frac{\partial}{\partial T} \left(c_1 / \left(n^2 \lambda^5 \exp \left(c_2 / \left(n \lambda T \right) \right) - 1 \right) \right) d_\lambda \,. \tag{7}$$

Všechny koeficienty soustavy diferenciálních rovnic (1) až (7) (fyzikální vlastnosti skloviny) jsou proměnné s teplotou, součinitel absorpce $\gamma_\lambda(T)$ a index lomu n pak i s vlnovou délkou. Při matematické simualci bylo užito regresních aproximačních vyjádření experimentálně získaných závislostí. Zdroj tepla na pravé straně rovnice (1), vzniklý průchodem elektrického proudu a zářením skloviny, je funkcionálem hledané teploty.

NUMERICKÉ ŘEŠENÍ EVOLUČNÍHO PROBLÉMU PROUDĚNÍ SKLOVINY ZA SOUČASNÉHO PŘENOSU TEPLA

Pro řešení časového vývoje funkcí T, p, u, v, V, q_{E} byla užita numerická síťová metoda konečných diferencí. Znamená to, že hledáme přibližná řešení v konečném počtu bodů sítě, kterou je pokryta spojitá oblast skloviny. Dané diferenciální rovnice i okrajové podmínky (poskytující nekonečný počet informací) se splní přibližně tak, že diferenciální operátory se nahradí diferenčními operátory, které je aproximují a které operují pouze na hodnotách hledaných funkcí ve všech uzlech sítě.

Numerická metoda řešení evolučního problému uvedené soustavy se opírá vesměs o implicitní schéma střídavých směrů [6].

Vývojový postup řešení evolučního problému spočívá v následujícím iteračním schématu. Předpokládejme znalost počátečních podmínek, to je znalost počátečních hodnot všech fyzikálních polí v diskrétních bodech sítě, pokrývající simulovanou oblast. Tyto hodnoty přísluší časové vrstvě (k). Hodnoty v časové vrstvě další, tj. v čase $\tau(k + 1)$, získáme vypočtením pole elektrického potenciálu a elektrického výkonu $V_{i,j}^{(k+1)}$, $q_{\mathrm{E}i,j}^{(k+1)}$ (fyzikální veličiny jsou vzaty z nižší časové vrstvy k), teplotního pole $T_{i,j}^{(k+1)}$ s následujícím vyřešením pohybových rovnic, kdy pole $u_{i,j}^{(k+1)}$, $v_{i,j}^{(k+1)}$ odpovídají fyzikálním veličinám již ve vrstvě $(k + 1)$. Tento iterační postup se opakuje až po dosažení zvoleného časového úseku. Při hledání stacionárního řešení je pak výpočet ukončen tehdy, neliší-li se hledané fyzikální pole v čase $\tau(k)$ od hodnot v čase $\tau(k + 1)$ více, než udává vhodně zvolená testovací veličina.

Fyzikální vlastnosti skloviny jsou takové, že se výpočet pohybuje v oblati velkých hodnot Prandtlova čísla (řádově 10^3). Tak velké hodnoty představují při numerickém řešení soustavy energetická rovnice — pohybová rovnice značný problém. Porovnejme energetickou rovnici (bez zdroje tepla)

$$DT/D\tau = a\, \nabla^2 T, \tag{8}$$

se zjednodušenými rovnicemi pohybovými (bez vztlakového a gravitačního členu):

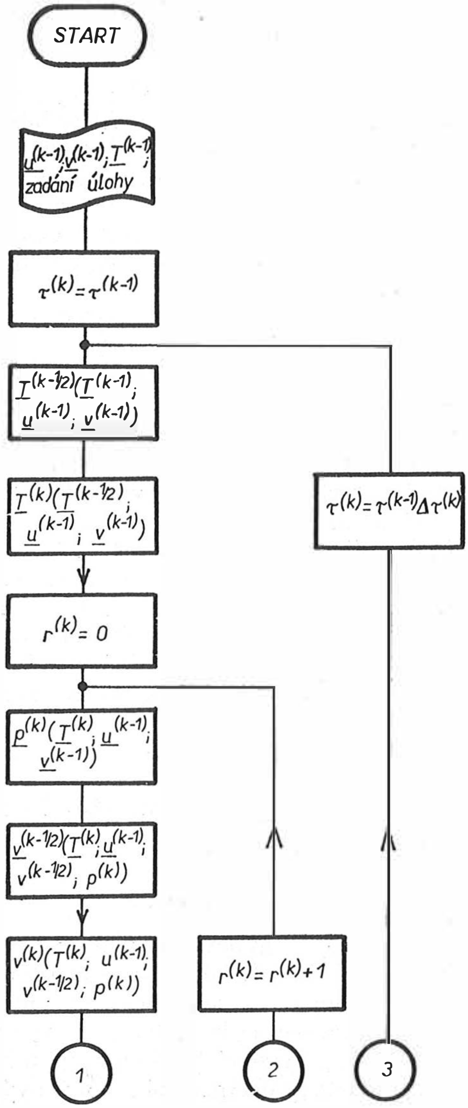
$$Du/D\tau = \nu\, \nabla^2 u, \tag{9}$$

$$Dv/D\tau = \nu\, \nabla^2 v. \tag{10}$$

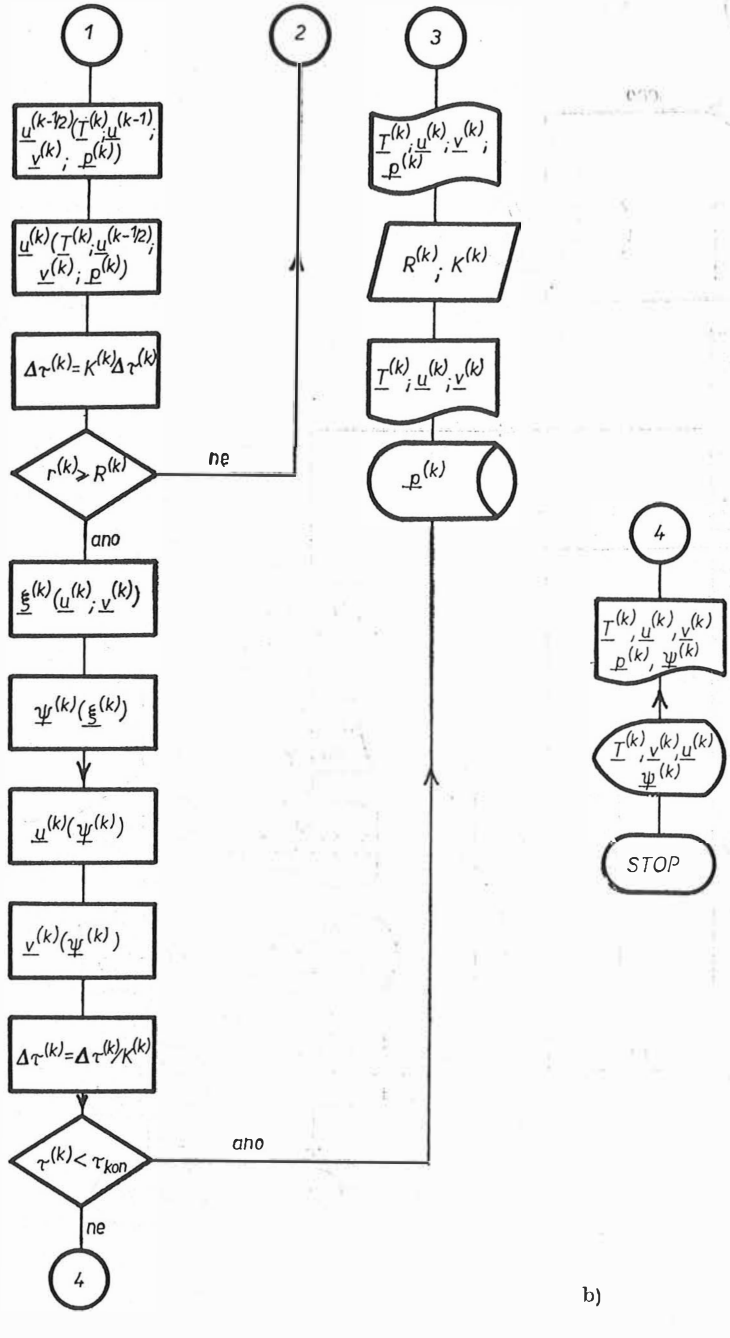
Rovnice energetická (8) a rovnice pohybové (9), (10) jsou podobné pouze pro hodnoty Prandtlova čísla $\mathrm{Pr} = \nu/a$ blízké 1, kdy časové konstanty vývojového řešení obou rovnic jsou stejné (tzv. dvojná analogie přenosu tepla a impulsu).

S rostoucími hodnotami Prandtlova čísla se tato analogie porušuje a jak plyne z řady výpočetních experimentů, potvrzených i literárními údaji [8], je pro zajištění stability numerického řešení soustavy energetické a pohybových rovnic nutné volit malý časový krok vyžadující řádově tisíce iteračních operací pro dosažení ustáleného řešení v oblasti velkých (řádově 10^3) Prandtlových čísel.

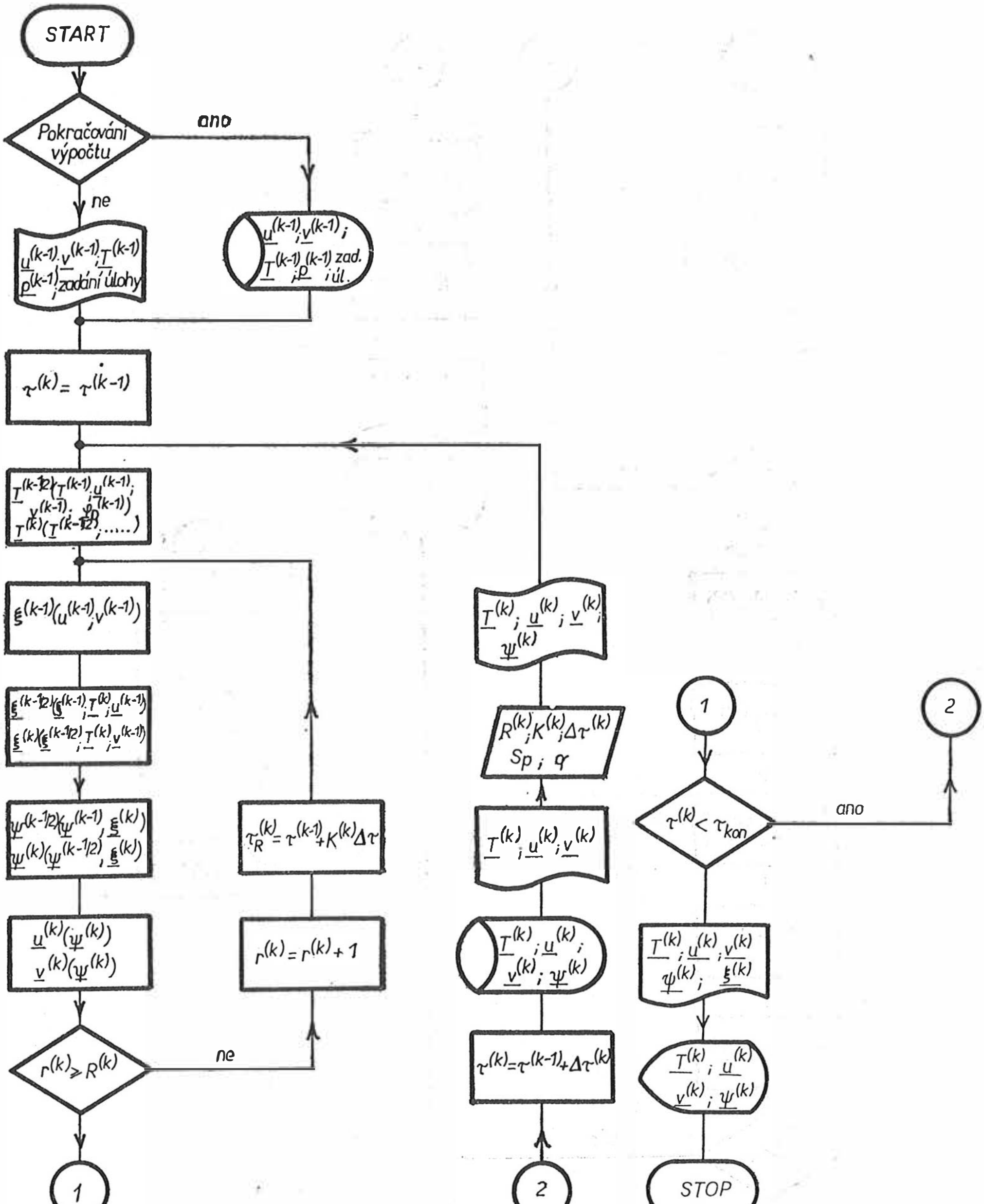
V SVÚS byl úspěšně odzkoušen heuristický algoritmus, umožňující snížit počet výpočetních operací řádově asi na 500. Spočívá v diferenciaci časového kroku pro oba typy rovnic. Maximální možná hodnota časového kroku numerického řešení energetické rovnice pro oblast velkých hodnot Pr čísel plyne z kritéria stability [1]. Pro řešení pohybových rovnic není užit stejný časový krok, ale je volen tak, aby časové konstanty obou rovnic byly přibližně stejné; poměr zobrazení je určen Prandtlovým číslem.



a)



Obr. 1a, b. Vývojový diagram numerického výpočtu fyzikálních polí ve sklářské vaně, proudění skloviny je spočteno přímým řešením pohybových rovnic.



Obr. 2. Vývojový diagram simulačního modelu, pohybové rovnice jsou řešeny transformací na rovnici zachování víru a zavedením proudové funkce.

NUMERICKÉ ŘEŠENÍ SOUSTAVY POHYBOVÝCH ROVNIC A ROVNICE KONTINUITY

Pro oblast nízkých Re čísel (definičním geometrickým rozměrem je krok sítě) se používá vesměs transformace pohybových rovnic (5), (6) a rovnice kontinuity (4) na rovnici proudové funkce:

$$\nabla^2 \psi = -\xi \tag{11}$$

a rovnici zachování víru:

$$D\xi/D\tau = \mathrm{div}\,(\nu\ \mathrm{grad}\ \xi) - g\beta(\partial T/\partial x). \tag{12}$$

Eliminace tlaku a odvození rovnic (11) a (12) spočívá v derivaci pohybové rovnice pro směr x podle y a rovnice (6) podle x a následujícím sečtením.
Pro složky rychlosti platí:

$$u = \partial\psi/\partial y, \qquad v = -\partial\psi/\partial x, \tag{13}$$

takže rovnice kontinuity je vždy splněna. Mezi nevýhody tohoto způsobu řešení patří: obtížnost rozšíření na třirozměrný problém, dodatečné vyhlazování rychlostního pole výpočtem z diferenciální rovnice o dva řády vyšší oproti pohybovým rovnicím a následující integrací. Přímé řešení pohybových rovnic je pro oblast nízkých Re čísel obtížněji realizovatelné pro potíže spojené s vyhověním rovnici kontinuity.

NUMERICKÁ ŘEŠENÍ ROVNICE ENERGIE

Pro řešení rovnice energie (vedení tepla) je užito fyzikálně odůvodněné interpolační funkce [5] řešení dílčích oblastí:

$$T(x, y, \tau) = a_0 + a_1(x - u\tau) + a_2 \exp(\varrho cux/\lambda_{\mathrm{ef}}) + \\ + a_3(y - v\tau) + a_4(\exp(\varrho cvy/\lambda_{\mathrm{ef}})). \tag{14}$$

Diferenční schéma rovnice (1) pak vychází z interpolačního vztahu (14), koeficienty $a_0 - a_4$ jsou definovány při teplotách v okolních uzlech.

Kromě podmínek stability, které platí pro čisté vedení tepla při tzv. explicitním diferenčním vyjádření (implicitní schéma dodatečné podmínky nevyžaduje)

$$\lambda_{\mathrm{ef}}\,\Delta\tau/(\varrho c\,\Delta x^2) \leqq 1/4, \\ \lambda_{\mathrm{ef}}\,\Delta\tau/(\varrho c\,\Delta y^2) \leqq 1/4, \tag{15}$$

musí být pro přenos tepla za současného proudění splněny i podmínky stability typu:

$$\mathrm{Pe}\,\Delta x/H \leqq 2, \tag{16}$$

$$\mathrm{Pe}\,\Delta y/L \leqq 2. \tag{17}$$

V problematice sklářských van jsou levé strany rovnic (16) a (17) řádu stovek a diferenční rovnice v obvyklém tvaru s chybou řádu $o(\Delta x^2)$ nelze proto užít.

Při nedodržení rovnice (16) nebo (17) je výpočet nestabilní, protože není splněno tzv. kritérium indexu [5], [6].

Nejznámějším způsobem, kterým lze odstranit nestabilitu při řešení rovnice přenosu energie v oblasti velkých Pécletových čísel, je metoda speciálního diferenčního přepisu protiproudým způsobem, up-wind-diference [7]. Tato metoda diferenciace pracuje opět s chybou řádu $\sigma(\Delta x^2)$. Její hlavní princip spočívá v tom, že fyzikální stav v obecném uzlu (i, j) je ovlivněn pouze fyzikálními jevy, probíhajícími v tomto uzlu a v uzlech ležících na proudnici procházející tímto bodem, a to pouze na části proudnice, ležící od výpočetního uzlu proti směru pohybu média. Fyzikální hodnoty stavu proudícího média v bodech ležících na proudnici za uzlem i,j ve směru proudění, se ve výpočetním schématu neuvažují. Splnění kritéria indexu vyžaduje splnění další dodatečné vazby mezi hodnotami časového kroku, oka sítě a Pécletova čísla (a tím i rychlosti proudění). Maximální dovolené hodnoty časového kroku vycházejí ještě menší než hodnoty nutné pro splnění stability explicitního diferenčního schématu pro vedení tepla v pevných látkách. Z tohoto důvodu v oblasti velkých Pécletových čísel nemají implicitní diferenční schémata výhodu oproti metodám explicitním.

●d kritických hodnot rychlosti proudění, daných nerovnostmi (16) a (17), přestávají být implicitními metody absolutně stabilní a časový krok je stabilizační podmínkou vázán na rozměry sítě, rychlost proudění a fyzikální vlastnosti proudícího média.

Metoda dílčích oblastí [5] využívá pro diferenční přepis energetické rovnice (1) interpolační funkce, která je partikulárním řešením této rovnice a je vhodná i pro interpolační polynom.

Užití fyzikálně zdůvodněné interpolační funkce přináší proti obvyklým interpolačním polynomům některé výhody. Popisuje lépe fyzikálně přenosové jevy v dílčí konečné oblasti vymezené konečnými diferencemi, protože interpolační funkce je analytickým rešením rovnice energie nad touto dílčí oblastí. Nevylučuje také výpočet mezních případů — čistého vedení tepla, resp. přenosu tepla pouze prouděním.

Využití metody dílčích řešení [5] vede ke stabilnímu řešení pro časové dělení dané vztahem:

$$\Delta\tau \leqq 1/(2\lambda_{ef}/(\varrho c)\ (g(\mathrm{Pe}\ \Delta x/H)/\Delta x^2 + g(\mathrm{Pe}\ \Delta y/L)/\Delta y^2)), \tag{18}$$

kde

$$g(\mathrm{Pe}\ \Delta x/H) = \mathrm{Pe}\ \Delta x \sinh(\mathrm{Pe}\ \Delta x/H)/(2H \cosh(\mathrm{Pe}\ \Delta x/H) - 1)), \tag{19}$$

$$g(\mathrm{Pe}\ \Delta y/L) = \mathrm{Pe}\ \Delta y \sinh(\mathrm{Pe}\ \Delta y/L)/(2L \cosh(\mathrm{Pe}\ \Delta y/L) - 1)). \tag{20}$$

FORMULACE OKRAJOVÝCH A POČÁTEČNÍCH PODMÍNEK

Jednoznačnost numerického řešení uvedené soustavy parciálních diferenciálních rovnic je určena počátečními a okrajovými podmínkami. Elektrická sklářská vanová pec představuje okrajový problém s volným rozhraním. Navržený model tento problém obchází zjednodušenou představou stálé tloušťky vrstvy kmene s pevným rovinným vodorovným rozhraním typu: kmen—atmosféra, kmen—sklovina, sklovina—atmosféra. V přesnějším modelu pece by do řešení měla být zahrnuta i úloha o volném rozhraní.

Dále uvedeme zmíněné jednoduché typy okrajových podmínek pro jednotlivá fyzikální pole. V konkrétních aplikačních simulacích se mohou vyskytovat specifické typy úloh, vyžadující složitější vyjádření okrajové podmínky.

A. Pohybové rovnice

a) Pevné rozhraní se třením $u = 0$; $v = 0$,

svislá stěna:
$\partial u/\partial x = 0$; $\partial v/\partial x = \partial v/\partial x^2 = 0$,

vodorovná stěna:

$\partial u/\partial y = \partial^2 u/\partial y^2 = 0$; $\partial v/\partial y = 0$.

b) Pevné rozhraní s nulovým třením (osa symetrie, volná hladina)
svislá stěna:

$\partial u/\partial x = \partial^2 u/\partial x^2 = 0$; $\partial v/\partial x = 0$,

vodorovná stěna:

$\partial u/\partial y = 0$; $\partial v/\partial y = \partial^2 v/\partial y^2 = 0$.

B. Proudová funkce

a) Zakládání kmene

$$\psi = -\int_0^{x_k} v_k \, dx, \qquad \partial\psi/\partial y = 0.$$

b) Volná hladina

$$\psi = \text{konst}; \qquad \partial^2\psi/\partial y^2 = 0.$$

c) Výtok skloviny

$$\psi = \int_0^{y_v} u_v \, dy; \qquad \partial\psi/\partial x = 0.$$

d) Pevná stěna — svislá $\psi = \text{konst}$; $\partial\psi/\partial x = 0$,
vodorovná $\psi = \text{konst}$; $\partial\psi/\partial y = 0$.

C. Vírová funkce

Okrajové podmínky vyplývají ze vzájemné kombinace okrajových podmínek složek rychlosti a proudové funkce.

D. Přenos energie

a) Oblast kmene

$$\lambda_{ef}(\partial T/\partial y) = \varrho_k v_k (q_k + c_k \, \Delta T_k + c \, \Delta T) + \alpha(T_k - T_0) + \\ + \varepsilon\sigma(T_k^4 - T_0^4).$$

b) Volná hladina

$$\lambda_{ef}(\partial T/\partial y) = \alpha(T - T_0) + \varepsilon\sigma(T^4 - T_0{}^4).$$

c) Pevná stěna, složená z vrstev žáruvzdorných a izolačních materiálů

$$\lambda_{ef}(\partial T/\partial n)_s = \lambda_1(\partial T/\partial n)_1 = \lambda_2(\partial T/\partial n)_2 = \dots \\ \dots = \alpha(T_n - T_0) + \varepsilon\sigma(T_n{}^4 - T_0{}^4).$$

E. Elektrický potenciál

$$\text{stěny} \qquad \partial V/\partial n = 0$$
$$\text{elektrody} \qquad V = V_E$$

F. Jouleův elektrický výkon

Okrajová podmínka vyplývá z vyjádření elektrického potenciálu.

Jako počáteční podmínky byly užity pravděpodobné odhady hodnot fyzikálních polí.

Teplotní závislosti látkových vlastností (kmene, skloviny, žáruvzdorného materiálu) byly získány experimentálně a pro výpočet byly aproximovány regresním polynomem.

SHRNUTÍ

Pro objektivizaci posouzení vlivu tvaru průtoku na provozní podmínky celoelektrické sklářské tavicí vany byl navržen dvojrozměrný matematický model respektující zakládání a tavení kmene, odběr skloviny, ohřev skloviny průchodem elektrického proudu a přenos tepla ve sklovině prouděním, vedením i zářením.

Pro konvergentní a stabilní výpočet byla navržena vhodná numerická metoda řešení soustavy příslušných parciálních diferenciálních rovnic.

Pro obecné simulace celoelektrických pecí matematickým modelem je nutné vyvinout model třírozměrný, realističtější než modely dosud publikované.

Přehled užitého značení a jednotek

u	ms^{-1}	složka rychlosti ve směru x
v	ms^{-1}	složka rychlosti ve směru y
T	K	teplota absolutní
p	Nm^{-2}	tlak
λ_{ef}	$Wm^{-1}\,K^{-1}$	efektivní součinitel měrné tepelné vodivosti
λ_m	$Wm^{-1}\,K^{-1}$	molekulární součinitel měrné tepelné vodivosti
V	V	potenciál
γ_E	$\Omega^{-1}m^{-1}$	součinitel měrné elektrické vodivosti
q_E	Wm^{-2}	měrný tepelný tok
c	$J\,kg^{-1}\,K^{-1}$	měrné teplo za stálého tlaku
ϱ	$kg\,m^{-3}$	měrná hmotnost
η	$Ns\,m^{-2}$	dynamická viskozita
g	$m\,s^{-2}$	gravitační zrychlení
γ_λ	m^{-1}	součinitel absorpce
n		index lomu
λ	m	vlnová délka
c_1, c_2		Planckovy konstanty
τ	s	čas
Pe		Pécletovo číslo
Re		Reynoldsovo číslo
Pr		Prandtlovo číslo
Ra		Rayleighovo číslo

operátory:

$$\frac{D}{D\tau} = \frac{\partial}{\partial\tau} + u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y}$$ substanční derivace

indexy:

k	kmen
v	výtok
n	vnější vrstva
o	okolí

Literatura

[1] Naruse A.: J. Soc. Glass Technol. *34*, 145 (1955), 145—155.
[2] Staněk J.: *Elektrické tavení skla*. SNTL, Praha 1976.
[3] Štefan J.: Silikáty *23*, 37 (1979).
[4] Němeček M.: Výzk. zpráva SVÚS Hradec Králové, 1976.
[5] Leyens G.: Glastech. Ber. *47*, 251 (1974).
[6] Skřivan M.—Štefan J.: Strojírenství *27*, 663 (1977).
[7] Gosman A.—Pun W.—Runchal A.—Spalding D.—Wolfshtein M.: *Heat and mass transfer in recirculating flows*. Academic Press, London 1969.
[8] Tai-Seng Chen—Goodson R.: Glass Technol. *13*, 161 (1972).
[9] Skřivan M.—Štefan J.: Sklář a keramik 29, 2 (1979).

ДВУХРАЗМЕРНАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ СТЕКЛОВАРЕННОЙ ВАННОЙ ПЕЧИ С ЦЕЛЬНОЭЛЕКТРИЧЕСКИМ ОТОПЛЕНИЕМ

Мирослав Скрживан, Ярослав Штефан

Государственный научно-исследовательский институт стекла, Градец Кралове

Стекломасса в ванне отопляется электрическим джоулевым теплом.

Общий случай нестационарного течения стекломассы при одновременном переносе тепла в ванне описывается системой парциальных дифференциальных уравнений.

Перенос тепла излучением в массе частично просвечиваемой стекломассы выражается аппроксимацией Росселанда. Все коэффициенты системы уравнений (т. е. физические свойства стекломассы) являются переменными в зависимости от температуры.

Числовой метод решения эволюционной проблемы приводимой системы основывается на неявной схеме переменных направлений. Для обеспечения стабильности числового решения энергетической системы и уравнений движения вывели эвристический алгорифм, использующий двойную аналогию переноса тепла и импульса, который представляет возможность понижения количества вычислительных итераций, порядка приблизительно до 500.

Максимальная возможная величина временного шага вычислительного решения энергетического уравнения для области больших чисел Прандтля вытекает из критерия стабильности, использующего физическое обоснование интерполяционной функции.

Приводятся типы граничных условий, применяемых для отдельных физических полей. Граничными условиями учитываются загрузка шихты и ее плавление, отбор стекломассы и подвод электроэнергии.

Рис. 1. Блок-схема вычисления физических полей в стекловаренной ванне; течение стекломассы расчитали прямым решением уравнений движения.

Рис. 2. Блок-схема имитирующей модели; уравнения движения решили трансформированием на уравнение сохранения вихря и введением функции тока.

TWO-DIMENSIONAL MATHEMATICAL MODEL OF AN ALL-ELECTRICALLY HEATED GLASS TANK FURNACE

Miroslav Skřivan, Jaroslav Štefan

State Glass Research Institute, Hradec Králové

The glass melt in the tank furnace is heated by the Joule electric heat.

The general case of non-stationary glass melt flow with simultaneous transfer of heat in the tank is described by a system of partial differential equations.

Transfer of heat by radiation in the mass of partially transparent glass melt is expressed by Rosseland's approximation. All the coefficients of the system of equations (i.e. the physical properties of the melt) are variable with temperature.

The numerical method for solving the evolution problem of the given system is based on the implicit scheme of alternating directions. For the purpose of ensuring the stability of numerical solutions of the system of energy and movement equations a heuristic algorithm was derived, making use of the twin analogy of heat and pulse transfer which allows to reduce the number of computing iterations to an order of about 500.

The maximum possible values of the time step in the numerical solution of the energy equation for the range of large Prandtle's numbers follows from the stability criterion which utilizes physical substantiation of the interpolating function.

The types of boundary conditions used for the individual physical fields are given. The boundary conditions respect batch feeding and melting, withdrawal of glass melt and supply of electric power.

Fig. 1. Flowchart of numerical calculation of physical fields in a glass tank furnace; the glass melt flow is calculated by direct solving of movement equations.

Fig. 2. Flowchart of a simulation model; the movement equations are solved by transformation to the eddy conservation equation and by introduction of the flow function.