

# VÝPOČET DEFORMACÍ A NAPĚTÍ V JEDNODUCHÝCH VISKÓZNÍCH TĚLESECH PŘI RŮZNÝCH ZPŮSOBECH ZATÍŽENÍ

JAROSLAV MENČÍK

Vysoká škola strojní a textilní, Hálkova 6, 461 17 Liberec

Došlo 26. 3. 1981

*V práci jsou odvozeny vztahy mezi zatížením a okamžitou rychlostí deformování viskózních tyčí, trubíc a desek s obecným rozložením viskozity v průřezu při zatížení osovou silou, ohybovým a krouticím momentem a radiálním tlakem. Průběh deformování v čase i velikost celkových deformací se získá integrací rychlosti deformace podle času. V práci je naznačen postup pro konkrétní případ, kdy se mění nejen tvar, ale také teplota a viskozita. Je diskutována otázka přesnosti výpočtů.*

## ÚVOD

V průmyslu silikátů často vyšetřujeme závislost mezi zatížením a deformacemi těles z materiálu, který můžeme přibližně považovat za viskózní nestlačitelnou kapalinu. Jako příklad uveďme sklovinu při tvarovacích teplotách. Při deformaci takových látek vznikají napětí podobných druhů jako při deformaci pružných hmot, avšak s tím rozdílem, že nejsou úměrná změnám tvaru, ale rychlostem těchto změn [1], [2]. Zatímco při deformování pružné látky platí

$$\tau = G\gamma, \sigma = E\varepsilon = 2(1 + \mu)G\varepsilon, \quad (1)$$

kde  $\tau$  je smykové napětí,  $\sigma$  normální napětí,  $\gamma$  poměrný zkos,  $\varepsilon$  poměrné prodloužení,  $G$  modul pružnosti ve smyku,  $E$  modul pružnosti v tahu a  $\mu$  součinitel příčné kontrakce (Poissonova konstanta), platí pro deformování nestlačitelné viskózní kapaliny (tzn. s  $\mu = 0,5$ )

$$\tau = \eta\dot{\gamma}, \sigma = 3\eta\dot{\varepsilon}, \quad (2)$$

kde  $\dot{\gamma} = d\gamma/dt$ ,  $\dot{\varepsilon} = d\varepsilon/dt$  jsou rychlosti poměrných deformací ve smyku a v tahu a  $\eta$  je koeficient dynamické viskozity ve smyku.

Poznámka. V reologické literatuře se někdy setkáváme s pojmem viskozity v tahu  $\lambda$ , jež je analogická k modulu pružnosti v tahu  $E$ , a platí  $\lambda = 3\eta$  [2].

Tato viskoelastická analogie umožňuje v mnoha případech řešit úlohy o deformování viskózních těles metodami známými z nauky o pružnosti. Umožňuje také přijímat určité hypotézy o charakteru deformování nebo dokonce již hotové výsledky s tím, že modulu pružnosti odpovídá součinitel viskozity a deformaci pružného tělesa odpovídá okamžitá rychlost deformování viskózního tělesa stejného tvaru a zatíženého stejným způsobem [3]. Přitom je však nutno přihlížet k jedné důležité okolnosti. Viskozita (na rozdíl od modulu pružnosti) bývá často proměnlivá v průřezu tělesa. (Například u skloviny závisí viskozita silně na teplotě, jejíž rozdělení v tvarovaném tělese může být nerovnoměrné.) I v takovémto případech můžeme používat vztahy, odvozené pro konstantní viskozitu (resp. modul pružnosti), jestliže do nich dosadíme vždy její střední hodnotu pro daný způsob deformování, jak uvidíme dále.

Práce je rozdělena do dvou částí. V teoretické části odvodíme vztahy mezi zatížením a okamžitou rychlostí deformace v tělesech jednoduššího tvaru, jako jsou tyče

a trubice, popř. desky, při zatížení osovou silou, ohybovým a kroutícím momentem a radiálními tlaky. V některých případech budeme obdobně jako v technické nauce o pružnosti předpokládat, že rovinné průřezy zůstanou i v průběhu deformování rovinnými. Protože takovýto předpoklad vyžaduje, přísně vzato, též určité rozdělení napětí na okrajích tělesa, což nebývá obvykle splněno, budou výsledky (v souladu se Saint Venantovým principem [4]) platit s dostatečnou přesností v místech vzdálenějších od okrajů; uplatní se tedy především u těles, jejichž tloušťka je malá ve srovnání s ostatními rozměry. Kromě toho zde nebudeme uvažovat vliv setrvačných sil, resp. budeme je považovat za zanedbatelné. (Této problematice je věnována např. práce [5].)

V praktické části ukážeme postup při stanovení celkové deformace tělesa s využitím odvozených vztahů, a všimneme si též chyb, vznikajících při výpočtu.

## TEORETICKÁ ČÁST

### Dlouhá tyč zatížená osovou silou

Nechť ve směru osy tyče, který označíme jako  $x$ , působí síla  $F_x$ . Ve směrech  $y$  ani  $z$  vnější síly nepůsobí. Viskozita závisí pouze na souřadnicích  $y, z$ . Příčný průřez tyče má obecný tvar.

Vyjdeme z předpokladu, že v místech vzdálenějších od okrajů se bude tyč deformovat jako jeden celek, tzn. že rychlost poměrného prodloužování v osovém směru bude ve všech bodech stejná,  $\dot{\varepsilon}_x = d\varepsilon_x/dt = \text{konst.}$  (Poměrné prodloužení je dáno vztahem  $\varepsilon_x = \Delta l/l_0$ .) Protože viskozita je funkcí polohy,  $\eta = \eta(y, z)$ , bude i napětí záviset na souřadnicích  $y, z$ .

Poměry ve směrech  $y, z$  zjistíme nejsnáze, představíme-li si tyč jakoby složenou z tenkých rovnoběžných vláken. Rychlost poměrné deformace jednotlivých vláken v příčném směru je rovna

$$\dot{\varepsilon}_y = \dot{\varepsilon}_z = -\mu \dot{\varepsilon}_x. \quad (3)$$

V případě, že součinitel příčné kontrakce  $\mu$  je ve všech vlákních stejný, což je u nestlačitelné kapaliny splněno automaticky, neboť pro ni platí  $\mu = 0,5$ , je všude stejná i rychlost poměrných deformací v příčném směru. To ovšem znamená, že příčný průřez tyče se deformuje jako jeden celek; jednotlivá vlákna na sebe nepůsobí a žádná přídavná napětí (následkem nerovnoměrného rozdělení viskozity) nevzniknou. Napjatost v tyči je jednoosá a napětí ve směru osy  $x$  je rovno

$$\sigma_x(y, z) = 3\eta(y, z) \dot{\varepsilon}_x. \quad (4)$$

Celková osová síla je dána výrazem

$$F_x = \int_{(S)} \sigma_x(y, z) dS = 3\dot{\varepsilon}_x \int_{(S)} \eta(y, z) dS. \quad (5)$$

Zavedeme-li tzv. střední viskozitu v průřezu při deformování v osovém směru,

$$\eta_{sA} = \frac{\int_{(S)} \eta(y, z) dS}{\int_{(S)} dS} = \frac{\int_{(S)} \eta(y, z) dS}{S} \quad (6)$$

kde  $S$  je plocha průřezu, můžeme vztah (5) zapsat stejným způsobem, jako kdyby šlo o homogenní těleso:

$$F_x = 3\dot{\varepsilon}_x \eta_{sA} S. \quad (7)$$

Z tohoto vztahu lze naopak určit okamžitou rychlost prodlužování tyče. (Rychlost relativního zvětšování příčných rozměrů je dána vztahem (3).)

Poznámka: Uvedené vztahy platí pro tyče (nebo trubice) libovolného průřezu, avšak s jedním omezením. Má-li v plném rozsahu platit hypotéza o zachování rovinnosti průřezů, tj.  $\varepsilon_x = \text{konst.}$ , musí být napětí i na koncích tyče rozděleno podle vztahu (4). Přibližně (v místech vzdálenějších od konců) postačí, prochází-li nositelka síly  $F_x$  těžištěm napěťového tělesa, jehož základna je shodná s průřezem tyče a výška je úměrná napětí  $\sigma_x(y, z)$ , resp. viskozitě  $\eta(y, z)$  v jednotlivých bodech. (Jde o obdobu působitě středu tlaku v hydrostatice.) V odlišném případě bude tyč namáhána též ohybem.

### Tenké tyče a desky zatížené ohybovým momentem

Omezíme se na případ, kdy průřez tyče je souměrný kolem osy  $z$  (ponecháváme označení  $z$  předchozího oddílu), viskozita závisí buď pouze na souřadnici  $z$ , nebo — mění-li se i ve směru  $y$  — je rozložena symetricky k ose  $z$  (např. u tyče s kruhovým průřezem). Vektor ohybového momentu  $M_0$  má směr osy  $y$ .

Vyjdeme z teorie ohybu tenkých křivých elastických prutů [4], která předpokládá zachování rovinnosti průřezu. Působením ohybového momentu se úhel, který svírají dva příčné řezy vzdálené na neutrální ose o  $ds$ , změní o  $d\varphi$ . (Má-li neutrální osa poloměr křivosti  $r$ , platí  $ds = r d\varphi$  a  $d\varphi = \Delta d\varphi$ .) Zároveň se změní poloměr křivosti z původního  $r$  na  $r_1$ . Označme jako tzv. poměrné natočení veličinu  $\kappa = d\varphi/ds$ . Za předpokladu, že se nemění délka neutrální osy, resp. plochy (tj. plochy, v níž nepůsobí žádná napětí), tzn.

$$ds = r d\varphi = r_1(d\varphi + \Delta d\varphi) = ds_1, \quad (8)$$

platí

$$\kappa = 1/r_1 - 1/r. \quad (9)$$

Při ohýbání viskózních tyčí přejdeme k rychlostem poměrných deformací. U tenké tyče je rychlost poměrného prodlužování vláken (ve směru osy  $x$ ) úměrná jejich vzdálenosti od neutrální plochy,

$$\dot{\varepsilon}_x(z) = z\dot{\kappa}, \quad (10)$$

kde  $\dot{\kappa} = d\kappa/dt$  je rychlost poměrného natáčení soumezných řezů.

Je-li šířka tyče malá, můžeme (v souladu s vývody předchozího oddílu) předpokládat, že sousední vlákna na sebe nepůsobí, takže napjatost je jednoosá. Potom normální napětí v jednotlivých vláknech je

$$\sigma_x(y, z) = 3\eta(y, z) \dot{\varepsilon}_x(z) = 3\eta(y, z) z\dot{\kappa}. \quad (11)$$

Ohybový moment je dán výrazem

$$M_0 = \int_{(S)} z \sigma_x(y, z) dS = 3\dot{\kappa} \int_{(S)} z^2 \eta(y, z) dS. \quad (12)$$

Zavedeme-li, obdobně jako v předchozím případě, tzv. střední viskozitu v průřezu při ohybu,

$$\eta_{so} = \frac{\int_{(S)} z^2 \eta(y, z) dS}{\int_{(S)} z^2 dS} = \frac{\int_{(S)} z^2 \eta(y, z) dS}{J_y}, \quad (13)$$

kde  $J_y = \int_{(S)} z^2 dS$  je tzv. kvadratický moment (setrvačnosti) průřezu k ose  $y$ , můžeme vztah (12) zapsat obdobně, jako kdyby šlo o homogenní těleso,

$$M_0 = 3\eta_{s0} J_y. \quad (14)$$

Zpětně můžeme ze vztahu (14) určit okamžitou rychlost natáčení soumězných řezů, popř. rychlost dalších deformací.

Polohu neutrální plochy, resp. osy  $y$ , od níž měříme vzdálenost  $z$  ve vztazích (10)–(13), určíme z podmínky, že elementární síly  $\sigma_x dS$  nesmějí dávat žádnou výslednici (neboť žádná normální síla v průřezu nepůsobí), tj.

$$\int_{(S)} \sigma_x(y, z) dS = 3\eta \int_{(S)} z\eta(y, z) dS = 0. \quad (15)$$

Ze vztahu (15) vyplývá, že osa  $y$  bude procházet těžištěm redukovaného průřezu (přidruženého k původnímu průřezu tyče), jehož šířka je všude  $\eta(y, z)$ -krát větší než šířka původního průřezu. Nebo — analogicky k případu zatížení osovou silou — bude procházet těžištěm tělesa, jehož základna je shodná s průřezem tyče a výška úměrná viskozitě  $\eta(y, z)$ .

Poznámka. Při propočtech deformací nesmíme zapomenout, že u tyčí s nepříliš velkou šířkou průřezu se vlivem příčné kontrakce změní tvar příčného průřezu, viz vztah (3). U širokých desek naproti tomu bude deformace ve směru osy  $y$  nulová, což se projeví vznikem napětí  $\sigma_y$  (v místech vzdálených od okrajů) a zvýšenou tuhostí desky. Výraz (13) pro stanovení střední viskozity při ohybu však zůstává v platnosti. Složitější rozdělení napětí nastává, je-li tloušťka tyče nebo desky srovnatelná s poloměrem křivosti. V takovém případě můžeme vyjít z teorie ohybu tlustých křivých prutů [4]; celkový postup zůstává obdobný.

### Tyče a trubice kruhového průřezu zatížené krouticím momentem

Vektor krouticího momentu  $M_k$  má směr osy tyče, který označíme  $x$ . Viskozita je rozložena symetricky k ose,  $\eta = \eta(r)$ . Podle způsobu upevnění tyče a přenosu krouticího momentu mohou nastat dva případy:

a) Jeden konec tyče (resp. trubice) je natáčen vůči druhému konci, povrch je volný. V takovém případě se příčné průřezy natáčejí jako jeden celek, aniž by se deformovaly (radiální paprsky zůstávají přímé). Úhel pootočení průřezu označíme  $\varphi$ , poměrné zkroucení (zkрут)  $\vartheta = d\varphi/dx$ , rychlost poměrného zkroucování  $\dot{\vartheta} = d\vartheta/dt$ . Smykové napětí v tyči (analogicky k elastickému případu [4]) je

$$\tau(r) = \eta(r) \dot{\vartheta} = \eta(r) r \dot{\vartheta} \quad (16)$$

a celkový krouticí moment

$$M_k = \int_{(S)} r\tau(r) dS = \dot{\vartheta} \int_{(S)} r^2\eta(r) dS = \dot{\vartheta} \eta_{sk} J_p, \quad (17)$$

kde  $\eta_{sk}$  je střední viskozita v průřezu při krutu, definovaná vztahem

$$\eta_{sk} = \frac{\int_{(S)} r^2\eta(r) dS}{\int_{(S)} r^2 dS} = \frac{\int_{(S)} r^2\eta(r) dS}{J_p} \quad (18)$$

a  $J_p = \int r^2 dS$  je tzv. polární moment (setrvačnosti) průřezu k ose tyče. Rychlost zkroucování určíme ze vzorce (17).

b) Vnitřní povrch trubice je natáčen vůči vnějšímu, radiální paprsky se zakřivují. (Tento případ nastává např. u rotačních viskozimetrů.)

Smykové napětí, přenášené válcovou vrstvou o poloměru  $r$  a tloušťce  $dr$ , je rovno

$$\tau(r) = \frac{M_k}{2\pi l r^2}, \quad (19)$$

kde  $l$  je délka trubice. Rychlost poměrné smykové deformace (zkosu) je  $\dot{\gamma} = \tau/\eta$ , takže rychlost vzájemného posouvání obou povrchů vrstvy je  $\dot{\gamma} dr$ . Potom přírůstek rychlosti otáčení vnějšího povrchu vrstvy (o poloměru  $r + dr$ ) proti rychlosti otáčení vnitřního povrchu (o poloměru  $r$ ) je

$$d\dot{\varphi} = \frac{\dot{\gamma} dr}{r} = \frac{\tau dr}{\eta r}. \quad (20)$$

Dosazením za  $\tau$  z (19) a integrací dostaneme, že rychlost otáčení vnějšího poloměru trubice  $b$  vůči vnitřnímu poloměru  $a$  je

$$\dot{\varphi} = \frac{M_k}{2\pi l} \int_a^b \frac{dr}{\eta(r) r^3} = \frac{M_k}{4\pi l \eta_s} \left( \frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} \right), \quad (21)$$

kde střední viskozita je definována výrazem

$$\eta_s = \frac{\int_a^b \frac{dr}{r^3}}{\int_a^b \frac{dr}{\eta(r) r^3}} = \frac{\frac{1}{2} \left( \frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} \right)}{\int_a^b \frac{dr}{\eta(r) r^3}}. \quad (22)$$

Poznámka. Zcela analogicky se odvodí rychlost v případě posouvání vnitřního povrchu vůči vnějšímu osovou silou.

### Dlouhá trubice kruhového průřezu zatížená radiálními tlaky

Nechť dlouhá trubice s rotačně symetrickým rozložením viskozity je na vnitřním povrchu (o poloměru  $a$ ) zatížena tlakem  $p_a$ , na vnějším povrchu (o poloměru  $b$ ) tlakem  $p_b$ . Ve směru osy trubice žádná vnější síla nepůsobí. Protože jde o rotačně symetrickou úlohu, přijmeme následující způsob označování:  $x, r$  — souřadný systém,  $w, u$  — posunutí v osové a radiálním směru,  $\varepsilon_x = dw/dx$ ,  $\varepsilon_r = du/dr$ ,  $\varepsilon_t = u/r$  — relativní prodloužení osové, radiální a obvodové,  $\dot{w}, \dot{u}, \dot{\varepsilon}_x, \dot{\varepsilon}_r, \dot{\varepsilon}_t$  — rychlosti jednotlivých deformací ( $d/dt$ ),  $\sigma_x, \sigma_r, \sigma_t$  — osové, radiální a obvodové napětí.

Při řešení budeme postupovat obdobně, jako by šlo o válcovou tlustostěnnou elastickou nádobu [4]. Rovněž přijmeme předpoklad, že ve větších vzdálenostech od konců se bude trubice deformovat jako jeden celek, takže bude platit  $\dot{\varepsilon}_x = \text{konst.}$  Protože viskozita obecně závisí na poloměru,  $\eta = \eta(r)$ , objeví se v trubici také osová napětí  $\sigma_x(r)$  a napjatost bude trojosá.

Rychlost poměrného prodlužování trubice v osové směru stanovíme nejsnáze užitím viskoelastické analogie. Přiložíme-li (myšleně) k elastické trubici, zatížené radiálními tlaky  $p_a, p_b$ , osovou silou  $F_x$ , je podle Bettiho věty [4] práce, kterou vykonají tlaky  $p_a, p_b$  při změně poloměrů  $a, b$ , účinkem síly  $F_x$ , stejně velká jako práce síly  $F_x$  při prodloužení trubice působením tlaků  $p_a, p_b$ :

$$2\pi l p_a \Delta a(F_x) - 2\pi l p_b \Delta b(F_x) = F_x \Delta l(p_a, p_b). \quad (23)$$

(Záporné znaménko u druhého členu vyplývá z toho, že při zvětšení poloměru koná tlak  $p_a$  kladnou a tlak  $p_b$  zápornou práci.) Zvětšení poloměru účinkem tahové síly  $F_x$  je (viz stať o zatížení osovou silou)

$$\Delta r = \varepsilon_t r = -\mu \varepsilon_x r = -\mu r \frac{F_x}{\int_{(S)} E(r) dS}, \quad (24)$$

kde  $E(r)$  je modul pružnosti v tahu. Po dosazení (24) do (23), vykrácení  $F_x$  a dalších úpravách dostaneme

$$\Delta l/l = 2\pi\mu \frac{p_b b^2 - p_a a^2}{\int_{(S)} E(r) dS}. \quad (25)$$

K viskózní trubici přejdeme nyní tak, že v (25) zaměníme poměrné prodloužení  $\varepsilon_x = \Delta l/l$  jeho rychlostí a modul pružnosti  $E$  výrazem  $3\eta$ . Kromě toho přihlídneme k nestlačitelnosti materiálu ( $\mu = 0,5$ ). Dostaneme tak, že rychlost poměrného axiálního prodloužování viskózní trubice, zatížené radiálními tlaky, je

$$\dot{\varepsilon}_x = \pi \frac{p_b b^2 - p_a a^2}{\int_{(S)} 3\eta(r) dS} = \pi \frac{p_b b^2 - p_a a^2}{3\eta_{sA} S}, \quad (26)$$

kde  $\eta_{sA}$  je tzv. střední viskozita v průřezu při deformování v osovém směru, definovaná vztahem (6). (S přihlédnutím, že  $S = \pi(b^2 - a^2)$ , je možno vztah (26) dále zjednodušit.)

Při dalších úpravách vyjdeme ze vztahů mezi napětími a rychlostmi poměrných deformací při trojosé napjatosti:

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_x &= \frac{1}{3\eta} \left[ \sigma_x - \frac{1}{2} (\sigma_r + \sigma_t) \right], \\ \dot{\varepsilon}_r &= \frac{1}{3\eta} \left[ \sigma_r - \frac{1}{2} (\sigma_t + \sigma_x) \right], \\ \dot{\varepsilon}_t &= \frac{1}{3\eta} \left[ \sigma_t - \frac{1}{2} (\sigma_x + \sigma_r) \right], \end{aligned} \quad (27)$$

dále z rovnice rovnováhy sil, působících v radiálním směru na element jednotkové tloušťky, vymezený řezy  $r = \text{konst}$ ,  $r + dr = \text{konst}$ ,  $\varphi = \text{konst}$ ,  $\varphi + d\varphi = \text{konst}$  [4]:

$$\sigma_r + r \frac{d\sigma_r}{dr} - \sigma_t = 0 \quad (28)$$

a z podmínky, že materiál je nestlačitelný, takže platí

$$\dot{\varepsilon}_x + \dot{\varepsilon}_r + \dot{\varepsilon}_t = 0. \quad (29)$$

Vyjádříme-li v (29) rychlosti poměrných deformací prostřednictvím rychlostí posuvů ( $\dot{\varepsilon}_r = d\dot{u}/dr$ ,  $\dot{\varepsilon}_t = \dot{u}/r$ ) a celou rovnici derivujeme podle  $r$ , dostaneme (s přihlédnutím, že  $\dot{\varepsilon}_x = \text{konst}$ , a tedy  $d\dot{\varepsilon}_x/dr = 0$ ) po úpravě

$$\frac{d^2 \dot{u}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\dot{u}}{dr} - \frac{1}{r^2} \dot{u} = 0. \quad (30)$$

Řešení diferenciální rovnice (30) má tvar

$$\dot{u} = C_1 r + C_2/r, \quad (31)$$

z něhož vyplývá

$$\dot{\epsilon}_r = C_1 - C_2/r^2, \quad \dot{\epsilon}_t = C_1 + C_2/r^2. \quad (32)$$

Po dosazení  $\dot{\epsilon}_r$  a  $\dot{\epsilon}_t$  z (32) do (29) dostaneme

$$C_1 = -\dot{\epsilon}_x/2, \quad (33)$$

kde  $\dot{\epsilon}_x$  je dáno vztahem (26).

Nyní odečteme druhou z rovnic (27) od třetí a přihlídneme ke vztahu (32):

$$\sigma_t - \sigma_r = 2\eta(\dot{\epsilon}_t - \dot{\epsilon}_r) = 4C_2 \frac{\eta}{r^2}. \quad (34)$$

Po dosazení do rovnice rovnováhy (28) a po úpravě dostaneme

$$\frac{d\sigma_r}{dr} = 4C_2 \frac{\eta}{r^3}. \quad (35)$$

Z této diferenciální rovnice vyplývá, že pro daný průběh  $\eta(r)$  je napětí  $\sigma_r(r)$  dáno vztahem

$$\int_{\sigma_r(a)}^{\sigma_r(r)} d\sigma_r = 4C_2 \int_a^r \frac{\eta(r)}{r^3} dr. \quad (36)$$

Dosadíme-li do tohoto výrazu  $r = b$ ,  $\sigma_r(b) = -p_b$ ,  $\sigma_r(a) = -p_a$ , obdržíme po úpravě

$$C_2 = \frac{p_a - p_b}{4 \int_a^b \frac{\eta(r)}{r^3} dr}. \quad (37)$$

Obdobně jako v předchozích oddílech zavedeme tzv. střední viskozitu v průřezu při deformování v radiálním směru:

$$\eta_{sR} = \frac{\int_a^b \frac{\eta(r)}{r^3} dr}{\int_a^b \frac{dr}{r^3}} = 2 \frac{a^2 b^2}{b^2 - a^2} \int_a^b \frac{\eta(r)}{r^3} dr. \quad (38)$$

Potom radiální napětí dle (36) s přihlédnutím k (37) a (38) je

$$\sigma_r(r) = -p_a + 2 \frac{p_a - p_b}{b^2 - a^2} \cdot \frac{a^2 b^2}{\eta_{sR}} \int_a^r \frac{\eta(r)}{r^3} dr \quad (39)$$

a obvodové napětí v souladu s (34)

$$\sigma_t(r) = \sigma_r(r) + 2 \frac{p_a - p_b}{b^2 - a^2} \cdot \frac{a^2 b^2}{r^2} \cdot \frac{\eta(r)}{\eta_{sR}}. \quad (40)$$

Osové napětí podle první z rovnic (27) bude

$$\sigma_x(r) = 3\dot{\epsilon}_x \eta(r) + \frac{1}{2} [\sigma_r(r) + \sigma_t(r)]. \quad (41)$$

Rychlost poměrného deformování v radiálním směru, plynoucí z (32) je

$$\dot{\epsilon}_r(r) = -\frac{\dot{\epsilon}_x}{2} - \frac{1}{2\eta_{sR}} \cdot \frac{p_a - p_b}{b^2 - a^2} \cdot \frac{a^2 b^2}{r^2} \quad (42)$$

a rychlost poměrného prodlužování v obvodovém směru, odpovídající rychlosti relativního zvětšování poloměru, je

$$\dot{\varepsilon}_t(r) = -\frac{\dot{\varepsilon}_x}{2} + \frac{1}{2\eta_{sR}} \cdot \frac{p_a - p_b}{b^2 - a^2} \cdot \frac{a^2 b^2}{r^2}, \quad (43)$$

přičemž  $\dot{\varepsilon}_x$  je dáno vztahem (26).

Okamžitou rychlost zvětšování vnitřního a vnějšího poloměru dostaneme ze vztahů

$$\dot{u}(a) = a\dot{\varepsilon}_t(a), \quad \dot{u}(b) = b\dot{\varepsilon}_t(b).$$

Poznámka. Dosazením  $a = 0$  dostaneme odpovídající vztahy pro plnou tyč kruhového průřezu.

#### PRAKTICKÁ ČÁST

Z předchozího vyplývá, že vztah mezi charakteristickým zatížením  $F$  (silou, momentem, tlakem) a rychlostí  $v$  charakteristické deformace viskózního tělesa (prodlužování tyče, zvětšování světlosti trubice apod.) můžeme obecně vyjádřit ve tvaru

$$v = \frac{Ff(l)}{\eta_s}, \quad (45)$$

kde  $f(l)$  je určitá funkce rozměrů a tvaru tělesa, a  $\eta_s$  je střední viskozita v průřezu při daném způsobu deformování. (Protože veličiny  $v$ ,  $F$ ,  $l$ , ale i  $\eta_s$  se mohou měnit s časem\*), jde v (45) o jejich okamžité hodnoty.)

V praxi potřebujeme zpravidla řešit některou z následujících úloh:

1. Je dána rychlost deformování a velikost zatížení a máme stanovit viskozitu.  
2. Je dán časový průběh zatížení a máme určit odpovídající průběh deformování, popř. celkovou změnu tvaru.

3. Je dán časový průběh změny rozměrů (např. předpokládaný pohyb čelistí tvarovacího nástroje) a máme určit odpovídající (resp. potřebný) průběh síly.

Prvá úloha nepředstavuje zvláštní potíže. Náročnější jsou druhé dvě, a to zejména tehdy, mění-li se v průběhu deformování rozměry, resp. průřez tělesa, jako např. při prodlužování tyče, jejíž objem zůstává stálý apod. Analytické řešení je možné jen v nejjednodušších případech a mnohem častěji užijeme řešení numerického, zejména jestliže jde o případ s měnící se viskozitou.

Obecný postup zde naznačíme pro druhou z úloh. Nechť máme dány rozměry tělesa, velikost zatížení a rychlost deformování, jakož i rozdělení teplot a viskozit v tělese v určitém (počátečním) okamžiku  $t_0$ . Nechť je dále dán časový průběh zatížení,  $F = F(t)$ , a okrajová podmínka pro výměnu tepla s okolím. Chceme zjistit tvar tělesa v čase  $t_1$ .

Vyjdeme z obecného vztahu pro stanovení změn tvaru,

$$l(t_1) = l(t_0) + \int_{t_0}^{t_1} v(t) dt. \quad (46)$$

Protože rychlost deformování představuje s ohledem na měnící se rozměry a viskozitu poměrně složitou závislost, musíme naznačenou integraci provádět numericky.

\*) Případ, kdy se viskozita mění s časem, nastává např. tehdy, závisí-li viskozita na teplotě a mění-li se během deformování teplota tělesa.

V takovém případě postupujeme po krocích. Interval  $\langle t_0, t_1 \rangle$  rozdělíme na úseky  $\Delta t$  tak malé, abychom mohli předpokládat, že uvnitř každého kroku zůstávají rozměry tělesa, zatížení a rychlost deformování prakticky konstantní a že viskozita je buď konstantní, nebo se mění pouze lineárně.

V každém výpočetním kroku stanovíme nejprve odpovídající změny teplot. Nejvhodnější je k tomu diferenční metoda explicitní, kdy těleso rozdělíme na řadu myšlených vrstev (předpokládáme zde pouze jednorozměrné sdílení tepla), a teplotu určité vrstvy na konci časového kroku dostaneme jako lineární kombinaci teplot vrstvy této a sousedních na začátku kroku (resp. na konci kroku předchozího).

Jakmile máme určeny teploty jednotlivých vrstev na konci časového kroku, stanovíme pomocí vztahu  $\eta = \eta(T)$  jejich odpovídající viskozity. Potom vypočítáme průměrnou viskozitu každé vrstvy v daném kroku (jako aritmetický průměr počáteční a konečné hodnoty) a numerickou integrací stanovíme střední viskozitu v celém průřezu pro daný způsob deformování.

Dosazením střední viskozity do vztahu (45) určíme střední rychlost  $v_s$  v daném (např.  $j$ -tém) časovení kroku a pomocí výrazu typu

$$l_j = l_{j-1} + v_{sj} \Delta t \quad (47)$$

určíme charakteristický rozměr tělesa na konci kroku. Nakonec, např. z podmínky, že objem tělesa zůstává konstantní, stanovíme zbývající rozměry.

Potom přejdeme k dalšímu časovému kroku: vypočítáme teplotu, viskozitu, rychlost deformování, celkové rozměry atd., přičemž nesmíme opomenout do příslušných vztahů dosadit změněné rozměry a popř. i novou hodnotu zatížení.

Podobně (popř. s vypuštěním některých úkonů) postupujeme i u jiných úloh. Podotkneme, že složitějším problémem než samotné určování změn tvaru u popsaných případů je výpočet teplot, resp. viskozit při nestacionárním sdílení tepla. I zde vycházíme z toho, že změna tvaru tělesa během jednotlivých časových kroků je zanedbatelná, a prakticky postupujeme, jako by šlo o tuhé těleso. Podrobnější rozbor a popis vhodných výpočetních metod přesahuje rámec tohoto článku a zájemce odkazujeme např. na práce [6], [7], [8]. Zde si všimneme pouze jediné věci, a to jaký vliv na přesnost stanovení rychlosti deformování má chyba v určení teploty. V některých případech, jako např. u skla, závisí totiž viskozita velmi výrazně na teplotě. Proto je důležité vědět ještě před zahájením výpočtů, s jakou přesností musíme určovat teplotu, nemá-li chyba ve stanovení rychlosti, resp. celkové deformace apod. překročit přípustnou hodnotu.

Diferencujeme-li výraz (45) a nahradíme-li diferenciály konečnými diferencemi, odpovídajícími chybám, dostaneme po úpravě

$$\frac{\Delta v}{v} = - \frac{\Delta \eta_s}{\eta_s} \quad (48)$$

V prvním přiblížení můžeme předpokládat  $\Delta \eta_s \doteq \Delta \eta$ . Pro danou závislost  $\eta(T)$  potom dostaneme obecný vztah

$$\frac{\Delta v}{v} \doteq - \frac{\Delta \eta}{\eta} = - \frac{1}{\eta} \cdot \frac{d\eta(T)}{dT} \Delta T'. \quad (49)$$

Všimněme si blíže případu tvarování skla. U žhavé skloviny (i u řady dalších látek) můžeme závislost viskozity na teplotě vyjádřit přibližně ve tvaru

$$\eta = A e^{\frac{B}{T - T_0}} \quad (50)$$

Po dosazení do (49) a provedení naznačené derivace obdržíme

$$\frac{\Delta v}{v} = - \frac{\Delta \eta}{\eta} = \frac{B}{(T - T_0)^2} \Delta T. \quad (51)$$

Dosaďme do tohoto výrazu některé konkrétní hodnoty. Z knihy [9] převezmeme údaje pro dvě různá skla. Např. „dlouhé“ sklo „A“ ( $T_g = 688$  K,  $T_l = 1473$  K) má v rovnici (50) tyto konstanty:  $A = 0,0389$ ,  $B = 9590$ ,  $T_0 = 408$  (platí pro vyjádření viskozity v dPas a teploty v K). Pro „krátké“ sklo „E“ ( $T_g = 903$  K,  $T_l = 1366$  K) jsou odpovídající hodnoty  $A = 0,00119$ ,  $B = 8828$ ,  $T_0 = 668$ . Omezíme se zde na méně příznivý případ, kdy se tvarování blíží ke konci a teplota je již poměrně nízká. Na příklad viskozity  $\eta = 10^6$  dPas je u skla A dosaženo při 970,1 K, kdy platí  $\Delta v/v = 0,030 \Delta T$ . U skla E je odpovídající teplota 1097,6 K a  $\Delta v/v = 0,048 \Delta T$ .

Z uvedeného příkladu vyplývá, že např. při modelování procesů tvarování skla může odchylka vypočtené teploty od přesné hodnoty o pouhý 1 °C mít za následek až několikaprocentní chybu ve stanovení okamžité rychlosti deformování, resp. odpovídající chybu při určení celkové velikosti deformace, při stanovení potřebné velikosti zatížení apod. S tím je nutno počítat, zejména již proto, že málokdy známe přesné hodnoty různých „konstant“, vstupujících do výpočtů. I přes tento nedostatek zůstává navržená metoda a odvozené vztahy cennou pomůckou zejména pro rychlé získání přibližné představy o průběhu deformování a o charakteristických veličinách.

#### ZÁVĚR

V práci byly odvozeny vztahy mezi zatížením a okamžitou rychlostí deformování viskózních tyčí, trubíc a desek s nehomogenním rozložením viskozity v průřezu při zatížení osovou silou, ohybem, krutem a radiálními tlaky. Analogie mezi deformováním viskózních a elastických látek dovoluje převzít obecný postup z technické nauky o pružnosti: Užití určité hypotézy o charakteru deformování při daném způsobu zatížení, stanovení závislosti mezi napětím a rychlostí poměrné deformace v obecném místě průřezu a sestavení vztahu mezi celkovým zatížením a rychlostí deformování. Zavedení tzv. střední viskozity (jež závisí na tvaru průřezu a rozdělení viskozity v něm, a dále na způsobu deformování) umožňuje používat jednoduché vzorce, odvozené pro homogenní tělesa.

Naznačeným způsobem lze odvodit vztahy pro další druhy těles nebo zatížení, přičemž u složitých zatížení je možno využívat principu superpozice. Průběh deformování v čase i velikost celkových deformací dostaneme integrací rychlosti deformace podle času. Ve složitějších případech je nutno provádět tuto integraci numericky, krok za krokem. V práci je naznačen postup pro případ, kdy se v průběhu deformování mění nejen tvar, ale také teplota a viskozita. V závěru je diskutována otázka přesnosti výpočtů.

#### Literatura

- [1] Smetana J.: *Hydraulika*. NČSAV, Praha 1957.
- [2] Reiner M.: *Deformacija i tčćenije*. Gosizdat NGTL, Moskva 1963.
- [3] Menčík J.: Sklář a ker. 29, 364 (1979).
- [4] Höschl C.: *Pružnost a pevnost ve strojnictví*. SNTL, Praha 1971.
- [5] Menčík J.: *Sborník prací VŠST Liberec* 1981.
- [6] Stoidl H. a kol.: *Úvod do proudění tekutin a sdílení tepla*. Academia, Praha 1975.

[7] Rektorys K. a kol.: *Přehled užité matematiky*. SNTL, Praha 1973.

[8] Štefan J., Skřivan M.: *Sklář a ker.* 28, 3 (1978).

[9] Volf M. B. a kol.: *Teplotné vlastnosti skel*. SNTL, Praha 1968.

## РАСЧЕТ ДЕФОРМАЦИЙ И НАПРЯЖЕНИЙ В ПРОСТЫХ ВЯЗКИХ ТЕЛАХ ПРИ РАЗНЫХ СПОСОБАХ НАГРУЗКИ

Ярослав Менчик

*Институт машиностроения и текстильной промышленности, Либерец*

Деформирование тел из вязкой несжимаемой жидкости, как напр. из расплавленной стекломассы, можно описывать с помощью подобных уравнений, служащих для описания деформирования упругих тел, с тем, что модулю упругости соответствует коэффициент вязкости и упругим деформациям мгновенные скорости вязких деформаций. При такой аналогии можно для решения задач деформирования вязких тел использовать из науки о сопротивлении материалов способы расчета и некоторые гипотезы относительно характера деформирования.

В предлагаемой работе выводятся отношения, имеющиеся между нагрузкой и мгновенной скоростью деформирования вязких стержней, трубок и плиток с общим (неоднородным) распределением вязкости в сечении, а именно при нагрузке продольной силой, изгибом, кручением и радиальными давлениями. Вводя так наз. среднюю вязкость, можно применять простые формулы, выведенные для однородных тел. Средняя вязкость зависит не только от формы сечения и распределения вязкости в теле, но и от способа деформирования. Распределение вязкости в сечении необходимо учитывать даже при определении положения нейтральной оси или центра действующих напряжений. Ход деформирования во времени и величину общих деформаций можно получить интегрированием скорости деформации согласно времени. В более сложных случаях нужно проводить данную интеграцию численно, шаг за шагом. В работе намечается способ в случае, когда во время деформирования изменяется не только форма, но и температура и вязкость. В заключение оценивается точность расчетов.

## CALCULATION OF DEFORMATIONS AND STRESSES IN SIMPLE VISCOUS BODIES UNDER VARIOUS MODES OF LOADING

Jaroslav Menčík

*The College of Mechanical and Textile Engineering, Liberec*

Deformation of bodies of viscous incompressible liquids such as glass melts can be described by equations similar to those for the deformation of elastic bodies by replacing the modulus of elasticity with the viscosity coefficient and elastic deformations with instantaneous rates of viscous deformation. When solving the deformation of viscous bodies, this analogy allows to use some calculation procedures and some hypotheses on the character of deformation from the field of elasticity studies.

Relationships have been derived between loading and instantaneous rate of deformation of viscous bars, tubes and plates showing general (inhomogeneous) viscosity distribution over the cross section, when loaded with axial forces, bending, torsion and radial pressures. Introduction of the so-called mean viscosity permits the use of simple formulas derived for homogeneous bodies. The mean viscosity depends on the shape of the cross section and on viscosity distribution over the cross section, and also on the mode of deformation. Viscosity distribution over the cross section should also be taken into account when determining the position of the neutral axis or the centre of the acting stresses. The course of deformation in terms of time, and the size of total deformations can be obtained by integrating the deformation rate in terms of time. In the more complex cases, this integration must be carried out numerically, step by step. A procedure is described for the case when shape, as well as temperature and viscosity change in the course of deformation. The problems of the calculation accuracy are discussed in the conclusion.