

## NÍZKOTEPLNÍ FYZIKÁLNÍ MODELOVÁNÍ ELEKTRICKÉHO TAVENÍ SKLA

VLADIMÍR BERNARD

Společná laboratoř pro chemii a technologii silikátů ČSAV a VŠCHT  
Suchbátarova 5, 166 28 Praha 6

Došlo 29. 1. 1985

*Podobnost celoelektrické sklářské pece a jejího modelu je dána transformačními rovnicemi mezi veličinami modelu a díla ve tvaru obecných funkcí, jejichž konkrétní vyjádření je důsledkem podobnosti. Teplotní závislost látkových vlastností (hustoty, dynamické viskozity, měrné tepelné a elektrické vodivosti) vede ke specifikaci teplotní transformační rovnice v lineárním tvaru, což umožňuje vlastní nastavení teplot na modelu. Látkové vlastnosti jsou jedinými nezávislými proměnnými, poskytujícími určitý prostor pro zachování podobnosti. Uvolnění lze dosáhnout zanedbáním setrvačných sil v rovnici pohybu a pak je podobnost dána teplotními průběhy dynamické viskozity a měrné elektrické vodivosti, modifikovaným Grashofovým, výkonovým a Rayleighovým číslem při adekvátním nastavení okrajových podmínek. Podobnost teplot na fázovém rozhraní sklovina—vsázka vyžaduje výkonný chladič přístroj k zchlazování hladiny modelu, čímž je simulováno tavné teplo skloviny.*

### Ú V O D

Při modelování sdílení tepla v proudovém elektrickém poli v proudící tekutině se setkáváme s nepříjemnou skutečností, že dosud užívanými modelovými kapalinami není možné dosáhnout exaktní podobnosti v běžných sklovinách za neizotermních podmínek. Podobnost však byla chápána ve smyslu prosté úměrnosti základních fyzikálních veličin, a proto je třeba vyšetřit, zda náhrada koeficientů úměrnosti obecnými funkčními vztahy nepřinese zlepšení. V řadě publikovaných prací se tyto potíže obcházejí tím, že nesnadno měřitelné veličiny jsou substituovány za dobře definované. Wright a Rawson [1] volí bezrozměrnou rychlost  $\mathbf{v} = |\mathbf{r}_R| \mathbf{v} / a_R$ , kde  $|\mathbf{r}_R|$  představuje charakteristický rozměr a  $a_R$  referenční teplotní vodivost (tj. vodivost v bodě daném polohovým vektorem  $\mathbf{r}_R$ ). Tím je učiněn předpoklad řádové rovnosti konvekčního a kondukčního členu objemové hustoty energie, avšak potom vychází rychlostní měřítko příliš nízké. Hrma [2] dosadil při použití stejné bezrozměrné rychlosti za bezrozměrný tlak  $\bar{p} = |\mathbf{r}_R|^2 p / \eta_R a_R$  a ve snaze využít co nejvíce technologicky významných a dobře měřitelných veličin definuje bezrozměrnou teplotu  $\bar{T} = (T - T_R) / (T_A - T_B)$ . Kromě obvyklé referenční teploty  $T_R$  zde vystupuje i vstupní  $T_A$  a výstupní  $T_B$  teplota tekutiny. Střední referenční měrnou tepelnou vodivost odhaduje jako  $\lambda_R = \dot{m} H / (T_A - T_B) |\mathbf{r}_R|$ , kde  $\dot{m}$  je hmotnostní odběr a  $H$  výrobní teplo skloviny. Podobně bezrozměrné teploty zavádějí Němeček [3], Gebhart [4] a Carling [5].

Je známo, že konstantová podobnost za předpokladu konstantních látkových vlastností vede bezpečně k cíli, avšak získaná kritéria podobnosti kladou vysoké nároky na modelové kapaliny a ještě se umocní, chceme-li dodržet podobnost v případě teplotně závislých látkových vlastností. Cílem tohoto příspěvku je konkretizovat obecně zadané transformační rovnice a společně se získaným souborem indikátorů (kritérií) podobnosti je aplikovat na okrajové podmínky celoelektrické sklářské pece.

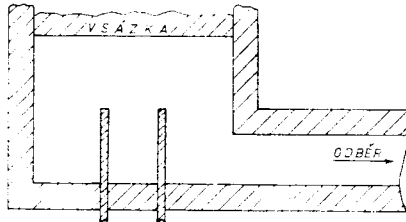
## VÝCHOZÍ ROVNICE A ZAVEDENÍ PODOBNOSTI

Definujeme podobnost jako určitý soubor vztahů mezi základními proměnnými modelu a díla. Porovnáním výchozích diferenciálních rovnic pro model a dílo po provedených substitucích transformačními rovnicemi vyplývají pro stejná řešení odpovídajících si rovnic modelu a díla podmínky podobnosti, sestávající se z transformačních rovnic již jednoznačně určených a indikátorů podobnosti, které musí být navzájem v souladu.

Protože budeme při popisu sledovaných dějů vycházet ze stejných diferenciálních rovnic, je třeba vzít v úvahu některé nedostatky nízkoteplotních modelů oproti skutečným pecím a pokusit se je potlačit, pokud je to možné, na minimum přijetím následujících předpokladů:

- proudění skloviny není podstatně ovlivněno bublinami ani neprotaveným pískem;
- při tavení vsázky nenastávají chemické reakce ani modifikační a fázové přeměny doprovázené různým tepelným zabarvením — výsledný entalpický efekt vzniku skloviny ze vsázky můžeme simulovat intenzivním chlazením hladiny modelu;
- podíl šíření tepla zářením lze formálně převést pomocí Rosselandovy aproximace na kondukční tvar použitím efektivní měrné tepelné vodivosti skloviny [6, 7].

Oblast pece, která bude s největším možným přiblížením podobná stejnohlé oblasti modelu, je na obr. 1 (nevýšrafovaná část). Vsázka není záměrně zahrnuta do sledované oblasti, neboť její vstupní teplota je blízká teplotě okolí, takže modelová kapalina by musela být zakládána za velice nízkých teplot (kolem 60 K), což by přineslo značné konstrukční potíže, zatímco na fázovém rozhraní sklovina—vsázka jsou teploty již dostatečně vysoké [8].



Obr. 1. Vymezení modelované oblasti pece (nevýšrafovaná část).

Výchozí rovnice kontinuity (1), pohybu (2), energie (3) a elektrického pole (4) jsou pro jednoduchost, avšak bez újmy na obecnosti, napsány pouze ve směru osy  $x$ . V rovnici (2) je použito Boussinesqovy aproximace pro vyjádření vlivu volné konvekce [4] a v rov. (3) jsou zanedbány nepatrné tepelné změny způsobené vnitřním třením (rychlost proudění a její divergence je velmi malá) a objemovou prací kapaliny. Sklovina i modelová kapalina je považována za newtonskou, izotropní, teplotně rozpínavou a elektricky vodivou tekutinu se zanedbatelnými dielektrickými a magnetickými vlastnostmi.

$$\partial \rho / \partial t + \partial / \partial x (\rho v_x) = 0. \quad (1)$$

$$\begin{aligned} & \rho (\partial v_x / \partial t + v_x \partial v_x / \partial x + v_y \partial v_x / \partial y + v_z \partial v_x / \partial z) = \\ & = -\partial p' / \partial x + \partial / \partial x (2\eta \partial v_x / \partial x - 2/3 \nabla \cdot \mathbf{v}) + \partial / \partial y [\eta (\partial v_x / \partial y + \end{aligned}$$

$$+ \partial v_y / \partial x] + \partial / \partial z [\eta (\partial v_z / \partial x + \partial v_x / \partial z)] - \beta \rho g_x \Delta T, \quad (2)$$

$$\rho c_P (\partial T / \partial t + v_x \partial T / \partial x) = \partial / \partial x (\lambda \partial T / \partial x) + \kappa (\partial \varphi / \partial x)^2 \quad (3)$$

$$\partial / \partial x (\kappa \partial \varphi / \partial x) = 0. \quad (4)$$

Mezi proměnnými modelu a díla je použito těchto transformačních rovnic:

$$\mathbf{r}_M = k_r \mathbf{r}_D \quad \text{geometrická podobnost ve všech směrech} \quad (5)$$

$$v_{xM} = v_{xM} [v_{xD}(\mathbf{r}_D, t_D)]$$

$$v_{yM} = v_{yM} [v_{yD}(\mathbf{r}_D, t_D)]$$

$$v_{zM} = v_{zM} [v_{zD}(\mathbf{r}_D, t_D)] \quad \text{podobnost složek rychlosti} \quad (6)$$

$$t_M = t_M(t_D) \quad \text{časová podobnost} \quad (7)$$

$$T_M = T_M [T_D(\mathbf{r}_D, t_D)] \quad \text{teplotní podobnost} \quad (8)$$

$$p'_M = p'_M [p'_D(\mathbf{r}_D, t_D)] \quad \text{podobnost zbytkových složek tlaku} \quad (9)$$

$$\varphi_M = \varphi_M [\varphi_D(\mathbf{r}_D, t_D)] \quad \text{podobnost elektrických potenciálů} \quad (10)$$

Kromě jednoznačného vyjádření geometrické podobnosti vystupují v rov. (6 ÷ 10) neznámé funkce  $v_{xM}$ , ...,  $\varphi_M$ , které je třeba určit. Použijeme-li pro libovolnou veličinu  $G$  transformační rovnici

$$G_M = G_M [G_D(\mathbf{r}_D, t_D)], \quad (11)$$

potom potřebné derivace k dosazení do rov. (1 ÷ 4) jsou

$$\partial G_M / \partial x_M = (dG_M / dG_D) (\partial G_D / \partial x_D) / k_r, \quad (12)$$

$$\partial^2 G_M / \partial x_M^2 = [(d^2 G_M / dG_D^2) (\partial G_D / \partial x_D)^2 + (dG_M / dG_D) (\partial^2 G_D / \partial x_D^2)] / k_r^2, \quad (13)$$

$$\partial G_M / \partial t_M = (dG_M / dG_D) (\partial G_D / \partial t_D) (dt_D / dt_M). \quad (14)$$

Pro látkové vlastnosti modelových kapalin a sklovin platí v běžném rozsahu teplot aproximační rovnice

$$\rho = \rho_0 \exp(-\beta T) \quad \beta > 0, \quad (15)$$

$$\eta = A \exp(B/T) \quad B < 0, \quad (16)$$

$$\kappa = C \exp(D/T) \quad D > 0, \quad (17)$$

kde  $\rho$  je hustota,  $\eta$  dynamická viskozita,  $\kappa$  měrná elektrická vodivost a  $\rho_0$ ,  $\beta$ ,  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  jsou experimentálně snadno zjistitelné konstanty. Pro  $x$ -ové (a analogicky i časové) derivace těchto vlastností potom platí

$$\partial \rho / \partial x = (d\rho / dT) (\partial T / \partial x) = -\beta \rho \partial T / \partial x, \quad (18)$$

$$\partial \eta / \partial x = (d\eta / dT) (\partial T / \partial x) = (-B\eta / T^2) \partial T / \partial x, \quad (19)$$

$$\partial \kappa / \partial x = (d\kappa / dT) (\partial T / \partial x) = (-D\kappa / T^2) \partial T / \partial x. \quad (20)$$

Měrnou tepelnou vodivost modelových kapalin na bázi glycerinu či ethylenglykolu lze považovat za konstantní [9, 10] a u většiny sklovin se řídí vztahem [11]

$$\lambda_D = aT_D^b, \quad (21)$$

takže

$$\partial \lambda_D / \partial x_D = (d\lambda_D / dT_D) (\partial T_D / \partial x_D) = (b\lambda_D / T_D) \partial T_D / \partial x_D. \quad (22)$$

Při známém analytickém vyjádření teplotních průběhů látkových vlastností se jejich podobnost redukuje pouze na podobnost teplotní, a tak slouží jako generátory teplotní transformační rovnice. Slabá lineární závislost měrné tepelné kapacity je zanedbána, protože nemá zásadní vliv na některý ze sledovaných dějů.

KONKRETIZACE TRANSFORMAČNÍCH ROVNIC,  
INDIKÁTORY PODOBNOSTI

Z rovnice elektrického pole (4) plyne pro elektrické potenciály rovnice

$$d^2\varphi_M/d\varphi^2_D = 0, \quad (23)$$

jejíž integrací dostaneme

$$\varphi_M = K_{\varphi,1}\varphi_D + K_{\varphi,2}. \quad (24)$$

Teplotní závislost  $\kappa(T)$  vede k rovnici

$$T_M = [(D_D/D_M T_D) + K_I]^{-1}, \quad (25)$$

která zaručuje

$$\kappa_M/\kappa_D = \text{konst.} \quad (26)$$

Z rovnice pohybu (2), kde za vztažný byl zvolen třetí člen, získáme pro složky rychlosti

$$v_{xM}/v_{xD} = v_M/v_D k_r, \quad (27a)$$

$$v_{yM}/v_{yD} = v_M/v_D k_r, \quad (27b)$$

$$v_{zM}/v_{zD} = v_M/v_D k_r. \quad (27c)$$

Rovnice (27a ÷ c) představují Reynoldsova čísla ve směrech  $x$ ,  $y$ ,  $z$ . Obecné transformační rovnice pro jednotlivé složky rychlosti plynou z podmíněk

$$(d^2v_{xM}/dv_{xD}^2)/(dv_{xM}/dv_{xD}) = 0, \quad (28a)$$

$$(d^2v_{yM}/dv_{yD}^2)/(dv_{yM}/dv_{yD}) = 0, \quad (28b)$$

$$(d^2v_{zM}/dv_{zD}^2)/(dv_{zM}/dv_{zD}) = 0. \quad (28c)$$

Za předpokladu  $dv_{xM}/dv_{xD} \neq 0$  dostaneme po integraci

$$v_{xM} = K_{v,1}v_{xD} + K_{v,2}, \quad (29a)$$

$$v_{yM} = K'_{v,1}v_{yD} + K'_{v,2}, \quad (29b)$$

$$v_{zM} = K''_{v,1}v_{zD} + K''_{v,2}. \quad (29c)$$

Porovnáním rov. (29 a ÷ c) s rov. (27a ÷ c) určíme

$$K_{v,2} = K'_{v,2} = K''_{v,2} = 0, \quad (30)$$

$$K_{v,1} = K'_{v,1} = K''_{v,1} = v_M/v_D k_r, \quad (31)$$

$$v_M/v_D = \text{konst.} \quad (32)$$

Zanedbáním setrvačných sil oproti vztlakovým a třecím silám v rovnici pohybu (2), což je při plíživém proudění běžná a často užívaná aproximace, odpadá i nutnost dodržet Reynoldsovo číslo a rychlosti jsou pak vázány pouze vztahem, který nazveme modifikovaným Grashofovým číslem

$$\beta_M g_{xM} \Delta T_M k_r^2 / \nu_M (dv_{xM}/dv_{xD}) = \beta_D g_{xD} \Delta T_D / \nu_D. \quad (33)$$

Celkovou rychlost proudění je užitečně rozložit na odběrovou (o) a cirkulační (c) složku

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}^{(o)} + \mathbf{v}^{(c)}. \quad (34)$$

Odběrovou rychlost lze vyjádřit pomocí hmotnostního odběru

$$\mathbf{v}_M^{(o)} / \nu_D^{(o)} = \dot{m}_{MQD} / \dot{m}_{DQMK_r^2} \quad (35)$$

a předpokládáme, že

$$d\mathbf{v}_M/d\mathbf{v}_D = \mathbf{v}_M/\mathbf{v}_D = \mathbf{v}_M^{(o)}/\mathbf{v}_D^{(o)} = \mathbf{v}_M^{(c)}/\mathbf{v}_D^{(c)}. \quad (36)$$

Při úplné podobnosti lze po substituci  $\nu_M$ ,  $\nu_D$  z *Re* do rov. (33) přepočíst rychlosti podle rovnice

$$\beta_M g_{xM} \Delta T_M k_r / \nu_{xM}^2 = \beta_D g_{xD} \Delta T_D / \nu_{xD}^2, \quad (37)$$

která je v souladu s Gebhartovým odhadem rychlosti volné konvekce [4] (při nulové nucené konvekci). Rov. (37) lze vyjádřit pomocí obvyklé symboliky jako

$$FrGy = \text{idem} \quad \text{či} \quad Re/\sqrt{Gr} = \text{idem}. \quad (38)$$

Substitucí za  $\nu_{xM}$  a  $\nu_{xD}$  z *Re* do rov. (37) dostaneme Grashofovo číslo

$$\beta_M g_{xM} \Delta T_M k_r^3 / \nu_M^2 = \beta_D g_{xD} \Delta T_D / \nu_D^2. \quad (39)$$

Stejným postupem podobnost zbytkových složek tlaku\* dává

$$dp'_M/dp'_D = (\eta_M/\eta_D k_r) (dv_{xM}/dv_{xD}). \quad (40)$$

Za  $dv_{xM}/dv_{xD}$  lze dosadit z rov. (33) (při zanedbání *Re*) a potom

$$\Delta p'_M = \eta_M \beta_M g_{xM} \Delta T_M k_r \nu_D \Delta p'_D / \eta_D \beta_D g_{xD} \Delta T_D \nu_M \quad (41)$$

nebo přímo z *Re*

$$\Delta p'_M = \eta_M \nu_M \Delta p'_D / \eta_D \nu_D k_r^2. \quad (42)$$

Indikátor (42) má prakticky malý význam a pouze nás informuje o vztahu mezi proměnnými  $\Delta p'_M$  a  $\Delta p'_D$ , jestliže mezi modelem a dílem je zachována úplná podobnost. Na základě teplotních průběhů  $\eta(T)$  podle rov. (16) vychází teplotní transformační rovnice v diferenciální formě

$$(d \ln \eta_M / dT_M) (dT_M / dT_D) = d \ln \eta_D / dT_D, \quad (43)$$

jejíž integrací s použitím rov. (19) dostaneme

$$T_M = [(B_D/B_M T_D) + K_I]^{-1}, \quad (44)$$

kde  $K_I$  je integrační konstanta. Srovnáním s rov. (25) plyne

$$B_M/B_D = D_M/D_D. \quad (45)$$

K rov. (45) dospěl jinou cestou Hrma [12].

Z rovnice kontinuity (1) získáme teplotní transformační rovnici

$$dT_M/dT_D = (\beta_D/\beta_M) (d \ln v_{xM}/d \ln v_{xD}), \quad (46)$$

\*) Zbytkovou složkou tlaku je míněn tlak v rov. (2), který vznikne Boussinesgovou aproximací odečtením statické složky od celkového tlaku. Jde tedy o tlak související s pohybem.

jejíž integrací za předpokladu platnosti rov. (36) dostaneme

$$T_M = (\beta_D/\beta_M) T_D + K_{T,2}, \quad (47)$$

kde  $K_{T,2}$  je integrační konstanta. Pro odpovídající si teplotní rozdíly  $\Delta T$  pak nezávisle na volbě integrační konstanty  $K_{T,2}$  platí přímá úměrnost

$$\Delta T_M = (\beta_D/\beta_M) \Delta T_D \quad (48)$$

odpovídající Gay-Lussacovu číslu  $Gy = \beta \Delta T$ . I když při některých úpravách je pro exaktnost  $Gy$  respektováno, u kapalin je natolik bezvýznamné, že ho lze považovat za degenerované. Rovnost  $Gy$  zaručuje  $\rho_M/\rho_D = \text{konst.}$  v celém prostoru modelu a pece, což je splněno u všech modelových kapalin a sklovin i s rozdílným  $Gy$ , jehož přímý vliv na rychlost proudění je však nepatrný, jak lze snadno odvodit ze stacionárního stavu rov. (1) pro místa 1 a 2

$$\ln(v_2/v_1) = \beta(T_2 - T_1). \quad (49)$$

Teplotní součinitel objemové roztažnosti  $\beta$  je u modelových kapalin řádu  $10^{-4} \text{ K}^{-1}$  a u sklovin  $10^{-5} \text{ K}^{-1}$ , takže změna rychlosti způsobená roztažností kapaliny je oproti celkové rychlosti proudění zanedbatelná i při značných teplotních diferencích (u sklovin je při  $\Delta T = 200 \text{ K}$ , což je nadnesený odhad, změna rychlosti 1,2 %). Podobnost volné konvekce, s níž bývá Gay-Lussacovo číslo i u kapalin někdy spojováno, lze získat z rovnice pohybu a vede k rov. (33). Pro přepočty odpovídajících si časů vychází rovnice

$$dt_M/dt_D = k_r v_{xD}/v_{xM}, \quad (50)$$

kteřá je v souladu s kinematickou definicí rychlosti a geometrické podobnosti. Za rychlosti lze opět dosadit buď rov. (27a) při úplné podobnosti včetně setrvačných sil nebo z rov. (33), když je  $Re$  zanedbáno.

Z rovnice energie (3), kde jako vztažný byl zvolen elektrický zdrojový člen, obdržíme teplotní transformační rovnici

$$[\lambda_M/\kappa_M(d\varphi_M/d\varphi_D)^2] d^2T_M/dT_D^2 = 0, \quad (51)$$

jejímž řešením je za předpokladu  $d\varphi_M/d\varphi_D \neq 0$  lineární vztah

$$T_M = K_{T,1} T_D + K_{T,2}, \quad (52)$$

kde  $K_{T,1}$  a  $K_{T,2}$  jsou integrační konstanty. Na tento tvar je třeba převést i rov. (25) a (44), neboť musí být vzájemně v souladu. Lze toho dosáhnout např. lineární regresí číselných hodnot teplot modelu a díla podle rov. (25) a rov. (44), jestliže vhodně zvolíme 1 pár (obvykle minimálních nebo maximálních) teplot na modelu a na díle.

Pro konvekční složku sdílení tepla platí

$$\rho_M c_{PM} v_{xM} k_r (dT_M/dT_D)/\kappa_M K_{\varphi,1}^2 = \rho_D c_{PD} v_{xD}/\kappa_D \quad (53)$$

a při podobnosti sdílení tepla vedením (na díle spojeným s radiací) musí být splněna podmínka odpovídající výkonovému číslu Po

$$\lambda_M (dT_M/dT_D)/\kappa_M K_{\varphi,1}^2 = \lambda_D/\kappa_D, \quad (54)$$

kteřá však pro  $\lambda_M = \text{konst.}$  a  $\lambda_D = aT_D^b$  nevede k teplotní transformační rovnici konzistentní s rov. (52). Určité vylepšení přinese zavedení střední efektivní měrné tepelné vodivosti v celém bazénu o objemu  $V$

$$\bar{\lambda}_D = 1/V \int_{(V)} \lambda(T) dV. \quad (55)$$

Protože však teplotní pole ve sklovině neznáme a je vlastně naším úkolem ho zjistit, nezbyvá než odhadnout střední teplotu a té přiřadit jedinou reprezentativní hodnotu  $\bar{\lambda}_D$ .

Při zanedbání  $Re$  vede substituce za  $v_{xM}$ ,  $v_{xD}$  pomocí rov. (33) do rov. (53) a sloučení s rov. (54) k Rayleighovu číslu  $Ra$

$$\varrho_{MCPM}\beta_M g_{xM} K_{T,1} k_r^3 / \lambda_M \nu_M = \beta_D \varrho_{DCPD} g_{xD} / \bar{\lambda}_D \nu_D. \quad (56)$$

Sloučením rov. (53) s rov. (54) dostaneme Pécletovo číslo  $Pe$

$$\varrho_{MCPM} k_r c_{xM} / \lambda_M = \varrho_{DCPD} v_{xD} / \bar{\lambda}_D \quad (57)$$

a respektováním  $Re$ , z něhož dosadíme za  $v_{xM}$  a  $v_{xD}$  do rov. (57), plyne Prandtlovo číslo  $Pr$

$$\varrho_{MCPM} \nu_M / \lambda_M = \varrho_{DCPD} \nu_D / \bar{\lambda}_D. \quad (58)$$

Z různých teplotních průběhů  $\lambda_M$  a  $\lambda_D$  plyne očividně nesplnitelný vztah

$$\lambda_D b / \kappa_D T_D = 0, \quad (59)$$

jehož číselná hodnota je však skutečně nízká, obvykle řádu  $10^{-1} \div 10^{-2}$  podle druhu skloviny. Protože radiace má v přenosu tepla u transparentních a semitransparentních sklovin dominantní úlohu, je třeba se smířit s tím, že i při dodržení všech ostatních indikátorů podobnosti bude teplotní pole a s ním úzce související veličiny modelu a díla zkršené.

#### PODOBNOST OKRAJOVÝCH PODMÍNEK

Jestliže je v celém prostoru sledované oblasti splněna podobnost základních veličin, můžeme z příslušných rovnic získat významné integrální charakteristiky.

Tak z rovnice kontinuity dostaneme integraci přes celý objem a převedením na plošný integrál podle Gaussovy—Ostrogradského věty vztah pro uzavřenou konturu

$$\int_{(S)} \varrho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S}. \quad (60)$$

Je-li plochou  $S$  průřez odběrového kanálu  $S_K$ , pak je hmotnostní průtok  $\dot{m}$  tímto kanálem definován

$$\dot{m} = \int_{(S_K)} \bar{\varrho} \mathbf{v}^{(0)} \cdot d\mathbf{S}, \quad (61)$$

kde  $\bar{\varrho}$  je střední hustota tekutiny na kontuře  $S_K$  a  $\mathbf{v}^{(0)}$  je odběrová rychlost. Předpokládejme, že v odběrovém kanále je nulový vertikální teplotní gradient a celková rychlost proudění je dána pouze hmotnostním odběrem. Při zanedbání  $Re$  dosadíme za rychlosti  $\mathbf{v}_M^{(0)}$  a  $\mathbf{v}_D^{(0)}$  z rov. (33) a dostaneme

$$\dot{m}_M = \bar{\varrho}_M \beta_M g_{xM} \nu_D k_r^4 K_{T,1} \dot{m}_D / \bar{\varrho}_D \beta_D g_{xD} \nu_M. \quad (62)$$

V opačném případě použijeme pro substituci rychlostí  $Re$ , což vede k jednoduchému vztahu

$$\dot{m}_M = k_r \eta_M \dot{m}_D / \eta_D \quad (63)$$

Další významnou veličinou je elektrický příkon  $P_{el}$ , který v souladu s posledním členem rov. (3) je dán jako

$$P_{el} = \int_{(V)} \kappa (\nabla \varphi)^2 dV. \quad (64)$$

Po aplikaci Gaussovy—Ostrogradského věty

$$P_{el} = \int_{(S_{e1})} \kappa \varphi \nabla \varphi \cdot d\mathbf{S}, \quad (65)$$

kde  $S_{e1}$  je povrch elektrod smáčený sklovinou (stěny, dno a vsázku považujeme za elektricky nevodivé). Použitím rov. (5), (24) a (26) plyne pro přepočít elektrických příkonů modelu a díla

$$P_{el, M} = \kappa_M k_r K_{\varphi, 1}^2 P_{el, D} / \kappa_D \quad (66)$$

a porovnáním plošného a objemového integrálu zároveň určíme  $K_{\varphi, 2} = 0$ . Převedení rov. (64) na (65) je ukázáno v [13]. Eliminací elektrického členu dostaneme pomocí rov. (54)

$$P_{el, M} = \lambda_M k_r K_{T, 1} P_{el, D} / \bar{\lambda}_D. \quad (67)$$

Nyní můžeme stanovit snadno relace mezi dalšími elektrickými veličinami. Elektrický příkon lze vyjádřit také

$$P_{el} = UI, \quad (68)$$

kde napětí  $U$  je definováno jako rozdíl potenciálů  $U = \Delta\varphi$  a  $I$  je elektrický proud. Dosazením rov. (66) do rov. (68) a porovnáním rovnic pro model a dílo, jestliže  $U_M/U_D = K_{\varphi, 1}$ , elektrické proudy se řídí rovnicí

$$I_M = \kappa_M k_r K_{\varphi, 1} I_D / \kappa_D. \quad (69)$$

Analogicky pro elektrické odpory platí

$$R_M = \kappa_D R_D / \kappa_M k_r. \quad (70)$$

Měřítka teplotních diferencí  $K_{T, 1}$ , které se objevuje v rov. (67), implicitně zahrnuje na díle i tavné teplo skloviny, tj. teplo potřebné na přeměnu vsázky o vstupní teplotě na sklovinu o minimální teplotě, představující značnou část elektrické energie. Je tudíž nezbytné dodržet teplotní podobnost na hranicích oblasti, kterou na peci jsou fázová rozhraní sklovina—vsázka a sklovina—žáromateriál.

## ZÁVĚRY

Často problematická volba referenčních veličin byla nahrazena transformačními rovnicemi pro veličiny modelu a díla. Lineární teplotní transformační rovnice, která je generována z analyticky vyjádřených závislostí  $\eta(T)$ ,  $\kappa(T)$ , ev.  $\lambda(T)$  modelové kapaliny a skloviny, umožňuje vlastní volbu při nastavení teplotního intervalu na modelu. Při jiném než prostém exponenciálním chování látkových vlastností s teplotou typu  $A \exp(B'T)$  je třeba provést vyrovnání korespondujících teplot modelu a díla lineární regresi v teplotním intervalu rozhodujícím pro dosažení podobnosti. Při zanedbání setrvačných sil v rovnici pohybu, a tím i Reynoldsova čísla, které v reálných celoelektrických sklářských pecích nabývá hodnot  $10^{-1} + 10^0$ , výjimečně za vysokých tavicích teplot u velkých agregátů  $10^1$ , nastane podstatné uvolnění požadavků na model. Výchozí rovnicí pro přepočít rychlostí je pak modifikované Grashofovo číslo za předpokladu, že poměr odběrové ku cirkulační rychlosti je stejný na modelu i díle. Gay—Lussacovo číslo s volnou konvekcí kapalin, s níž bývá někdy spojováno, přímo nesouvisí, a tudíž lze zanedbat i Froudovo a Galileovo číslo. Podobnosti okrajových podmínek lze využít pro stanovení přepočtu hmotnostních odběrů a elektrických veličin, důležitých při návrhu a dimenzování napájecích zdrojů.



**Literatura**

- [1] Wright S., Rawson H.: *Glass Technol.* 14, 42, (1973).
- [2] Hřma P.: *Silikáty* 24, 265 (1980).
- [3] Němeček M.: *Sklář a keramik* 28, 297 (1978).
- [4] Gebhart B.: *Heat Transfer*, 2. vyd., str. 389. McGraw-Hill 1971.
- [5] Carling J. C.: *Two and Three Dimensional Mathematical Modes of the Flows and Heat Transfer in Forehearths*. University of Sheffield 1976.
- [6] Rosseland S.: *Astrophysik und Atom-Theoretische Grundlage*. Springer Verlag, Berlin 1931.
- [7] Noble J. J.: *The Effects of Radiative Transfer on Natural Convection*, Ph. D. Thesis, Massachusetts Institute of Technology, 481, 1968.
- [8] Schill P.: *Silikáty* 26, 3 (1982).
- [9] *Glycerol*: ASC Monographs No. 117, str. 312—313. New York 1953.
- [10] *Glycols*: Am. Chem. Soc., Series of Monographs No. 114, str. 51—52, New York 1952.
- [11] Blažek A.: *Měření tepelné vodivosti skla a výpočet teplotních profilů*, VŠCHT, Praha 1980.
- [12] Hřma P.: *J. Am. Ceram. Soc.* 66, 519 (1983).
- [13] Němeček M.: *Diskrétní modelování elektrických sklářských pecí*, doktorská dizertáční práce, SLS ČSAV a VŠCHT, Praha 1980.

**НИЗКОТЕМПЕРАТУРНОЕ ФИЗИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ  
ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО СТЕКЛОВАРЕНИЯ**

Владимир Бернад

*Общая лаборатория химии и технологии силикатов ЧСАН и ХТИ  
166 28 Прага*

Условия подобия выводятся из уравнений непрерывности, движения, энергии и электрического поля в жидкости, зависимость свойств которой от температуры выражается с помощью приближённых уравнений. Между основными физическими величинами модели и агрегата за исключением геометрического подобия, предполагались общие функциональные отношения (уравнения трансформации), которые конкретизировали и вместе с дальнейшими показателями подобия получали в результате одинаковых решений соответствующих дифференциальных уравнений. Температурное трансформационное уравнение генерировали с помощью констант, имеющихся в уравнениях приближения для температурной зависимости свойств вещества. Это уравнение удовлетворяет требованию линейности  $T_m = K_{T,1}T_D + K_{T,2}$ , которое может быть достигнуто с небольшой погрешностью регрессий цифровых величин соответствующих температур модели и агрегата при условии, что они описываются не экспоненциальной зависимостью типа  $A'e^{bx}$  (ВТ). На основании подбора пригодного  $K_{T,2}$  можно на модели установить необходимую разницу температур. Пренебрегая силами инерции по сравнению с силами трения и подъема можно получить степень свободы и использовать её для расчета геометрического масштаба из критерия Рейля. На основании критерия мощности рассчитывают масштаб электрических напряжений и на основании модифицированного числа Грасгофа масштаб скоростей. На основании граничных условий получали отношения для пересчета отбора массы и электро мощности между моделью и печью. Теплоту плавления необходимо моделировать интенсивным охлаждением поверхности модельной жидкости.

*Рис. 1. Ограничение модельной области стекловарения (неаширихованная часть).*

LOW-TEMPERATURE PHYSICAL MODELLING  
OF ELECTRIC GLASS MELTING

Vladimír Bernard

*Joint Laboratory for the Chemistry and Technology of Silicates  
Czechoslovak Academy of Sciences and Institute of Chemical Technology  
166 28 Prague*

The similarity conditions were derived from equations of continuity, motion, energy and electrical field in a liquid whose material properties were expressed by approximative equations in terms of temperature. Between the basic physical quantities of the model and the full-size equipment, general functional relationships were assumed to exist (transformation equations) with the exception of geometrical similarity. The relationships were rendered concrete, and together with further similarity indicators obtained as consequences from the same solutions of the respective differential equations. The temperature transformation equation was derived by means of constants occurring in approximative equations for the temperature dependence of the material properties; however, it does not conform to the requirement of linearity  $T_M = K_{T,1}T_D + K_{T,2}$ , which can be achieved, while not introducing any great error, by performing linear regression of the numerical values of the corresponding temperatures for the model and for the actual plant, insofar as the values have been obtained from a different relationship than the exponential type  $A \exp B/T$ . The necessary temperature range can be preset on the model by choosing a suitable  $K_{T,1}$ . Neglecting of inertial forces with respect to those of internal friction and buoyancy will yield one degree of freedom which can be utilized for calculating the geometrical scale from Rayleigh's number. The electric voltage scale is calculated from the Power number, and the velocity scale from modified Grashof's number. The relationships for converting throughputs and electric heat supplies between the model and the full-size equipment were obtained from the boundary conditions. The batch-to-glass conversion heat has to be simulated by cooling extensively the model surface level.

*Fig. 1. The modelled part of the furnace (non-hatched area).*

PHASE DIAGRAMS FOR CERAMISTS. VOL. V. (Fázové diagramy pro keramiky).  
Edice R. S. Roth, Taki Negas a Lawrence P. Cook, 395 str. Data byla shromážděna v National Bureau of Standards. Vydavatel: The American Ceramic Society, Columbus, Ohio 1984.

Tento pátý svazek je doplňkem svazku předchozího a obsahuje fázové diagramy systémů, které nebyly dosud uvedeny. Jsou to fázové diagramy halidů, siřníků, karbidů a nitridů, systémů obsahujících vodu, kyslíčník uhlíčitý a anorganické těkavé látky. Ze systémů karbidů a nitridů jsou však uvedeny pouze ty, které obsahují současně kyslík, u systémů chalkogenidů jen ty, které obsahují síru, u selenidů a teluridů ty, které obsahují současně siřníky. Nejsou vůbec uvedeny systémy obsahující vzácné plyny a také rovnováhy v systémech obsahujících vodu při tlacích menších než 1 atmosféra. Tyto rovnováhy budou publikovány v samostatném svazku.

Dokonale přehledný způsob podání rovnovážných diagramů je zachován zcela stejný jako ve svazcích předchozích a u každého diagramu je uveden literární pramen a stručný komentář o čistotě použitých materiálů, metodice měření a posouzení naměřených dat s citacemi dalších literárních pramenů. Knihu uzavírá autorský rejstřík a abecední seznam systémů zahrnutých v pátém svazku.

Pro každého, kdo se zabývá výzkumem či výrobou nekovových konstrukčních materiálů, je soubor tabulek „Phase Diagrams for Ceramists“, které rediguje a vydává od roku 1948 The American Ceramic Society“, nepostradatelným pramenem informací a nesmí rozhodně chybět v knihovně žádného výzkumného pracoviště.

Šatava