Silikáty 29, s. 111—124 (1985)

VÝPOČET TEPLOTNÍ NAPJATOSTI KERAMICKÝCH TĚLES I

Milan Švarc*, Yvona Mazačová**, Vladimír Hanykýř**

*Státní výzkumný ústav pro stavbu strojů, Běchovice, 190 00 Praha 9
**Vysoká škola chemicko-technologická, Suchbátarova 5
166 28 Praha 6

Došlo 13. 9. 1984

V článku je metodou termoelastického potenciálu posuvů ukázáno odvození vztahů pro složky teplotní napjatosti rotačního válce s teplotním profilem tvaru paraboly druhého stupně. Ačkoli jsou vztahy (25), (26) a (32) uváděné např. v [1] odvozeny pro homogenní materiál, mají praktický význam pro orientační výpočet teplotní napjatosti při výpalu těles i z materiálu, jehož parametry jsou teplotně závislé, viz keramický materiál. Zvláštní pozornost je v práci věnována způsobům popisu volné teplotní deformace s důrazem na nelineární oblast dilatačního chování materiálu.

ÚVOD

Při výpalu vzniká v keramickém tělese napjatost vyvolaná gradientem teplotního pole, který závisí na složení materiálu, rozměrech tělesa a rychlosti výpalu. Překročí-li napětí vznikající ve vypalovaném tělese okamžitou pevnost materiálu, často ovlivněnou poruchovými faktory iniciovanými ve výrobku již v průběhu předchozích technologických operací, dojde k mechanickému poškození materiálu.

Nastavování vypalovacích režimů a jejich řízení v praxi však stále zůstává do značné míry empirickou záležitostí, neboť chování keramického materiálu a reakce probíhající při výpalu nelze v žádném případě považovat za jednoduché.

S ohledem na závažnost ekonomických ztrát, které mohou v průběhu vypalovacího procesu vznikat, věnuje se v poslední době značná pozornost matematickému modelování procesů při výpalu keramiky. Dílčím úsekem tohoto úkolu je řešení teplotní napjatosti v keramickém válcovém tělese, které může sloužit jako dobrá předloha rotačně symetrických výrobků zhotovovaných v praxi, např. vysokonapěťových plnojádrových izolátorů.

METODY VÝPOČTU TEPLOTNÍ NAPJATOSTI

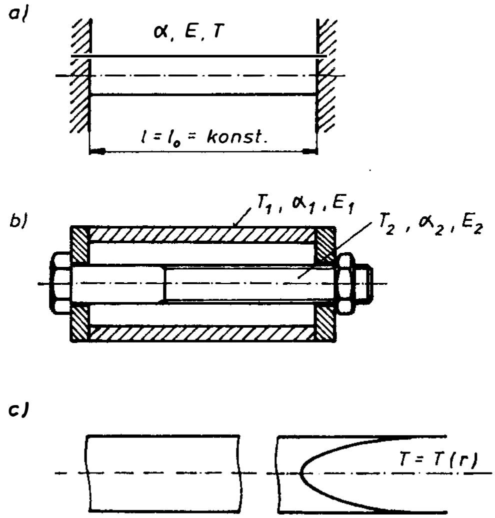
Teplotní napjatostí tělesa rozumíme stav napjatosti, který v tělese existuje výhradně následkem přiložení teplotního pole, obecně proměnného v prostoru i čase. Tato teplotní napjatost vzniká v každém mechanickém systému, ve kterém je následkem vzájemné vazby jeho částí zabráněno jejich volné deformaci vyplývající z teplotní dilatace.

Pro výpočty, se kterými se setkáváme v technické praxi, je vhodné odděleně uvažovat tři druhy omezení volného přetvoření systému:

a) Vnitřně staticky určitý mechanický systém (soustava těles), jehož volná teplotní deformace je omezena vnější statickou neurčitostí (statická neurčitost vyplývající z uložení) — obr. 1a.

b) Uvažovaný systém se skládá z konečného počtu n prvků, jejichž přetvoření jsou vzájemně vázána konečným počtem m geometrických deformačních výminek (v uvažovaném lineárním uspořádání $m \leqq 2n - 3$). Jednoduchým reprezentantem těchto m-krát vnitřně staticky neurčitých systémů je např. soustava znázorněná na obr. 1b.

c) Systémem je těleso, jehož přetvoření je v každém bodě vázáno splněním podmínek kompatibility deformací, a můžeme je tudíž pro tyto účely považovat za nekonečněkrát vnitřně staticky neurčitý systém, viz obr. 1c.



Obr. 1. Příklady tří druhů omezení volného přetvoření systému;
a) vnitřně staticky určitý systém, teplotní napjatost $\sigma_t = -E\alpha\,\Delta T$ vzniká v důsledku staticky neurčitého uložení, b) jedenkrát vnitřně staticky neurčitý systém, c) nekonečněkrát vnitřně staticky neurčitý systém, jehož přetvoření je vázáno podmínkami kompatibility deformací.

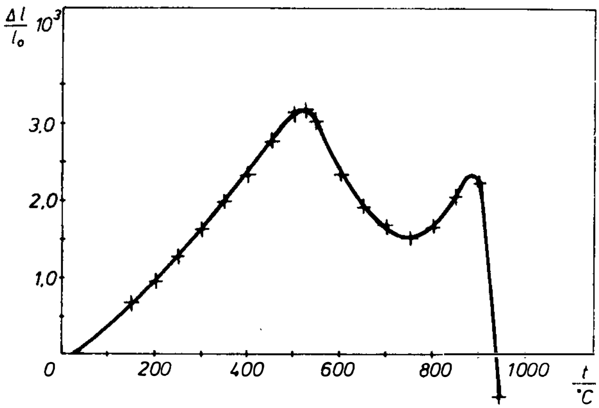
Zatímco v prvých dvou případech není obvykle výpočet spojen s přílišnými obtížemi, je analytické řešení pole teplotní napjatosti těles vždy značně komplikované.

Teoretická mechanika kontinua umožňuje v každém případě formulovat matematický model vzájemné souvislosti mezi prostorovým skalárním teplotním polem existujícím v tělese a prostorovým polem tenzorů II. řádu napjatosti a deformace, které toto teplotní pole vyvolává. Tato závislost je v obecném případě tvořena soustavou 16 simultánních parciálních diferenciálních rovnic. Řešení této soustavy v uzavřeném tvaru je známo pouze pro některá tělesa (rotační či středová souměrnost, desky, nosníky) při předpokladu homogenity materiálu, a to navíc jenom v případě jednoduchých teplotních polí.

V případě komplikovanějšího tvaru tělesa, podstatné nehomogenity materiálových vlastností (vyvolané např. jejich výraznou teplotní závislostí) anebo složitějšího teplotního pole je tudíž problémy skupiny c) možno věrohodně řešit pouze aplikací numerických metod. Analytické metody však přesto pro svoji jednoduchost a snadné použití nadále zůstávají nenahraditelnou metodou orientačního výpočtu kvalitativního charakteru. S přihlédnutím k těmto skutečnostem je tento článek věnován objasnění postupu analytického výpočtu teplotní napjatosti homogenního rotačního válce s teplotním profilem tvaru paraboly druhého stupně.

POPIS VOLNÉ TEPLOTNÍ DEFORMACE

Vzhledem k tomu, že teplotní napjatost je v každém případě důsledkem nesouladu mezi volnou teplotní deformací systému (tj. deformací systému s uvolněnými staticky neurčitými omezeními) a skutečným stavem deformace systému, je nezbytné vhodným způsobem definovat metodu výpočtu volné teplotní deformace systému. Teplotní délkové změny reálných materiálů mohou být v pozorovaném teplotním rozsahu výrazně nelineární (obr. 2) a pro jejich popis je v zásadě možno použít následujících postupů:



Obr. 2. Charakteristický průběh délkových změn keramického materiálu se zvýšeným obsahem Al_2O_3 *v závislosti na teplotě výpalu.*

a) Experimentálně zjištěnými hodnotami relativních délkových změn vzorku se proloží empirická závislost daná např. polynomem n-tého stupně tvaru

$$\frac{\Delta l(\Delta T)}{l_0} = \alpha_1 \Delta T + \alpha_2 (\Delta T)^2 + \ldots + \alpha_n (\Delta T)^n, \tag{1}$$

kde koeficienty α_n se určí např. minimalizací kvadratické odchylky experimentálních bodů od funkčních hodnot (1). Pro menší teplotní gradienty a délkové změny obvykle postačí uvažovat pouze lineární část, ve které je potom obvyklé $\alpha_1 = \alpha$ nazývat součinitelem délkové teplotní roztažnosti.

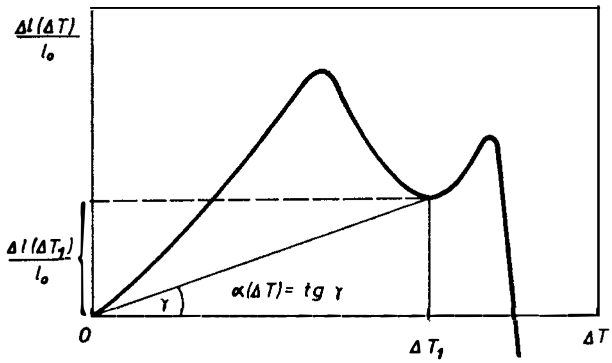
b) Použije se kvazilineárního vztahu

$$\frac{\Delta l(\Delta T)}{l_0} = \alpha \Delta T, \tag{2}$$

ve kterém je součinitel délkové teplotní roztažnosti funkcí teploty

$$\alpha = \alpha(\Delta T) = \frac{\Delta l(\Delta T)}{l_0 \Delta T}, \tag{3}$$

jejíž průběh je dán např. tabelací empirických hodnot podle obr. 3. Vzhledem k tomu, že veškeré výpočty termopružnosti pro homogenní materiály pracují s okamžitou hodnotou volné teplotní deformace danou lineární částí (1), je po formální stránce vhodné použít v případě nehomogenity materiálu analogického výrazu (2).



Obr. 3. Způsob výpočtu volné teplotní deformace s použitím teplotně závislého součinitele délkové roztažnosti vyhodnoceného z křivky délkových změn materiálu podle vztahu (2).

c) Pro výpočet okamžité hodnoty volné teplotní deformace se využije diferenciálního výrazu

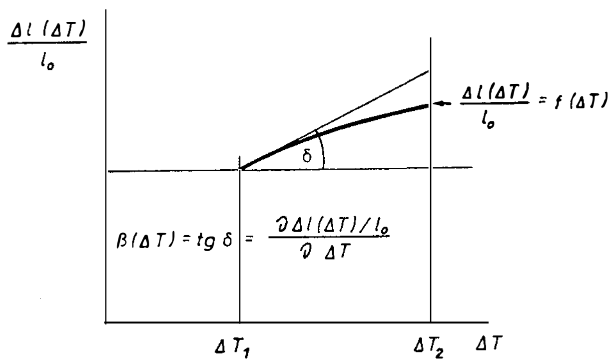
$$\Delta l(\Delta T + d\Delta T) = \Delta l(\Delta T) + \frac{\partial \Delta l(\Delta T)}{\partial \Delta T} \, . \, d\Delta T, \tag{4}$$

ze kterého pro změnu volné teplotní deformace při přechodu systému ze stavu ΔT_1 do stavu ΔT_2 vyplývá vztah

$$\Delta l(\Delta T_2) = \Delta l(\Delta T_1) + \beta \, . \, (\Delta T_2 - \Delta T_1), \tag{5}$$

kde součinitel β (obr. 4) je dán derivací

$$\beta(\Delta T) = \frac{\partial}{\partial \Delta T} \left[\frac{\Delta l(\Delta T)}{l_0} \right]. \tag{6}$$

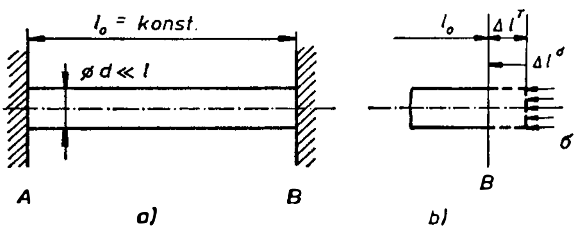


Obr. 4. Způsob výpočtu volné teplotní deformace podle rovnice (5).

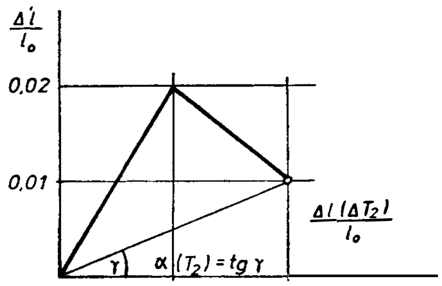
Funkční závislost (6) je empirického charakteru a její průběh je dán numerickou derivací experimentálně zjištěné křivky $\Delta l = \Delta l(\Delta T)$ konkrétního materiálu. Použití této metody s sebou nese nevýhody v podobě relativně pracného zjišťování teplotní závislosti $\beta = \beta(T)$ a v oblasti změny charakteru dilatačního chování materiálu i omezení použitelné velikosti teplotní změny mezi po sobě následujícími kroky výpočtu. Tyto nevýhody nejsou vyváženy žádným přínosem, a proto se metody c), pokud je autorům známo, pro výpočty nepoužívá.

Je však samozřejmé, že stav napjatosti v tělese je zcela nezávislý na způsobu, jakým je volná teplotní deformace popsána, a výpočty důsledně využívající libovolné z uvedených metod a)—c) jsou tudíž naprosto ekvivalentní. Vzhledem k určité nejednotnosti, která v tomto směru v oblasti pevnostních výpočtů keramiky panuje, se jeví jako vhodné na tomto místě konstatovat, že jakákoliv záměna mezi definicemi způsobu popisu volné teplotní deformace vede k nesprávné představě o skutečném stavu napjatosti systému. Snadno se o tom lze přesvědčit z následujícího triviálního příkladu.

Uvažujme rovnoměrně prohřívané těleso (vnitřní teplotní napětí je v tomto případě možno pro $d \ll 1$ zanedbat) uložené podle obr. 5 a předpokládejme, že dilatační chování materiálu se řídí grafem na obr. 6. Pro výpočet teplotní napjatosti v tělese



Obr. 5. Příklad vzniku osové teplotní napjatosti ve staticky neurčitě uloženém nosníku; a) uložení nosníku, b) deformační výminka.



Obr. 6. Schematický příklad nelineárního dilatačního chování materiálu a vyjádření jeho volné teplotní deformace.

uvolníme staticky neurčitou vazbu např. v bodě B a její účinek nahradíme rovnoměrně rozloženým axiálním napětím σ. Vzhledem k restrikci osové deformace platí deformační výminka mezi prodloužením tyče od teploty a osové síly

$$\Delta l^T + \Delta l^\sigma = 0.$$

Výraz pro délkovou deformaci od osové síly vyplývá z Hookova zákona ve tvaru $\Delta l^\sigma = \sigma l_0 / E$ (kladné hodnoty napětí odpovídají tahovému namáhání). Dosazením do deformační výminky se pro závislost teplotní napjatosti na volné teplotní deformaci získá jednoduchý výraz

$$\sigma = -\frac{\Delta l^T}{l_0} E, \tag{7}$$

který je možno pro lineární oblast dilatačního chování materiálu přepsat ve známém tvaru

$$\sigma = -E\alpha\Delta T, \tag{8}$$

kde $\Delta T = T - T_0$ je teplotní rozdíl vůči počátečnímu rovnovážnému stavu. Referenční teplotu T_0 položíme rovnu 273,15 K.

Zajímá-li nás stav napjatosti tělesa v nelineární oblasti dilatačního chování materiálu (např. při teplotě T_2), je v tomto případě správné dosazení zcela evidentní

$$\sigma(T_2) = -\frac{\Delta l^T(T_2)}{l_0} E. \tag{9}$$

Rovněž je zřejmé, že s ohledem na definici (2) je možno nadále formálně pracovat se součinitelem α, který je v tomto případě pro každou teplotu dán vztahem (3). Pak platí

$$\sigma(T_2) = -\alpha(T_2) \, . \, T_2 \, . \, E = -0{,}01E.$$

Pokud bychom ve vztahu (8) bez zřetele na jeho odvození zaměnili součinitel α za koeficient β ze vztahu (6), který je v tomto případě pro ohřev mezi teplotami T_1 a T_2 dán vztahem

$$\beta = \left(\frac{\Delta l^T(T_2)}{l_0} - \frac{\Delta l^T(T_1)}{l_0}\right) \cdot \frac{1}{T_2 - T_1} = -\frac{0{,}01}{T_1},$$

vypočítali bychom výslednou teplotní napjatost jako tahové napětí o numerické hodnotě

$$\sigma(T_2) = -T_2\beta E = -2T_1 \, . \left(-\frac{0{,}01}{T_1}\right) E = +0{,}02E.$$

Vzhledem k tomu, že tyč, jejíž volná délka je při teplotě T_2 rovna l_0 (1 + 0,01), zaujímá podle uvažovaného uspořádání konstantní délku l_0, je v ní možnost existence tahového namáhání vyloučena. Z uvedeného příkladu vyplývá, že ve složitých případech v praxi, kdy chybí názorná interpretace napjatosti systému, je možno si při nesprávném dosazení vstupních parametrů matematického modelu vytvořit fyzikálně zcela nesprávnou představu odezvy materiálu.

ZÁKLADNÍ VZTAHY ANALYTICKÉ TERMOELASTICITY

Uvažujme analytické řešení nesvázané úlohy teorie termoelasticity, tj. výpočet napětí a deformací při zadaném poli teploty. Předmětem řešení je v tomto případě 15 neznámých veličin: 6 složek tenzoru napětí σ_{ij}, 6 složek tenzoru deformací ε_{ij}, 3 složky vektoru posunutí u_i. Pro určení těchto neznámých funkcí musíme vyjít ze základních rovnic termoelasticity [3], jejichž splnění se v objemu tělesa identicky požaduje. Těmito rovnicemi jsou v kartézském souřadném systému x_i ($i = 1, 2, 3$):

a) Tři rovnice statické rovnováhy

$$\sigma_{ij,j} + F_i = \nu \ddot{u}_i,$$

kde podle symboliky běžné v tenzorovém počtu je použito zápisu $\sigma_{ij,j} = \partial\sigma_{ij}/\partial x_j$ a $\ddot{u}$ představuje druhou derivaci posunu podle času.

b) Šest rovnic zobecněného Hookova zákona

$$\sigma_{ij} = \frac{E}{1+\mu}\left(\varepsilon_{ij} + \frac{\mu\varepsilon_{kk}}{1-2\mu}\delta_{ij} - \frac{1+\mu}{1-2\mu}\delta_{ij}\alpha\Delta T\right).$$

c) Šest rovnic kompatibility deformací

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}).$$

Řešení těchto rovnic musí vyhovovat příslušným okrajovým podmínkám, které předepisují geometrickou nebo silovou vazbu na částech povrchu tělesa.

Výpočet v posuvech je možné provést tak [2], že vyjádříme $\sigma_{ij,j}$ v rovnici statické rovnováhy s použitím rovnice b)

$$\frac{E}{1+\mu}\left(\varepsilon_{ij,j} + \frac{\mu}{1-2\mu}\varepsilon_{kk,i} - \frac{1+\mu}{1-2\mu}\alpha\Delta T_{,i}\right) + F_i = v\ddot{u}$$

a pro výpočet derivací složek deformací použijeme rovnice c). Po algebraických úpravách má takto odvozená úplná rovnice termoelasticity tvar

$$\frac{E}{2(1+\mu)}u_{i,kk} + \frac{E}{2(1+\mu)(1-2\mu)}u_{k,ik} - \frac{E\alpha}{1-2\mu}\Delta T_{,i} + F_i = v\ddot{u}_i.$$

V případě výpočtu čisté teplotní napjatosti ($F_i \equiv 0$) a při omezení na kvazistatické procesy se tato rovnice zjednoduší na

$$u_{i,kk} + \frac{1}{1-2\mu}u_{k,ik} = \frac{2(1+\mu)}{1-2\mu}\alpha\Delta T_{,i}. \tag{10}$$

Partikulární řešení této rovnice je možno nalézt [4], zavedeme-li pro vyjádření posuvů novou funkci $\Phi(x_i)$

$$u_i = \Phi_{,i}, \tag{11}$$

která se nazývá termoelastickým potenciálem posuvů. Po dosazení této funkce do rovnice (10), přejde základní rovnice termoelasticity do tvaru

$$\Phi_{,kk} = \frac{1+\mu}{1-\mu}\alpha\Delta T. \tag{12}$$

Řešením této Poissonovy parciální diferenciální rovnice pro daný tvar teplotního pole se nalezne funkce Φ, ze které lze postupně vyjádřit hledané výrazy pro posuvy (vztah (11)), deformace

$$\varepsilon_{ij} = \Phi_{,ij} \tag{13}$$

a napětí

$$\sigma_{ij} = \frac{E}{1+\mu}(\Phi_{,ij} - \delta_{ij}\Phi_{,ii}). \tag{14}$$

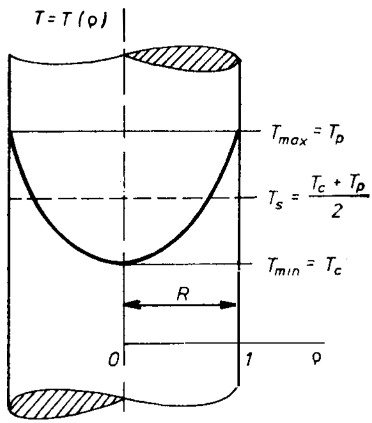
Takto nalezené partikulární řešení rovnice (10) obecně nesplňuje okrajové podmínky úlohy. Pro jejich splnění je obvykle nutné na toto řešení superponovat řešení homogenní rovnice (10).

ANALYTICKÉ ŘEŠENÍ TEPLOTNÍ NAPJATOSTI ROTAČNÍHO VÁLCE S TEPLOTNÍM PROFILEM TVOŘENÝM PARABOLOU 2. STUPNĚ

Předpokládáme-li, že gradienty teplotního pole v tělese budou dostatečně malé na to, aby bylo možno zanedbat teplotní závislost materiálových parametrů, je řešení teplotní napjatosti rotačního válce jednou z úloh, pro které je známo klasické řešení v uzavřeném tvaru. Jednou z cest, kterou je možno toto řešení zjistit, je metoda výpočtu používající termoelastický potenciál posuvů. Její aplikací je provedeno odvození vztahů uváděných pro složky uvažované teplotní napjatosti v oblasti technologie silikátů, např. v [1]. Pro odvození je třeba dále předpokládat rotačně symetrické teplotní pole, v tomto případě s parabolickou závislostí druhého stupně teploty na poloměru. Extrémní hodnoty tohoto teplotního pole označíme podle obr. 7 a pro dosažení plné formální shody budoucích vztahů odvozených pro složky teplotní napjatosti se vztahy v [1] použijeme pro parabolu teplotního profilu vyjádření

$$T(\varrho) = 2T_s - T_p + 2(T_p - T_s)\,\varrho^2, \tag{15}$$

kde T_s je aritmetická střední teplota ve válci daná vztahem $T_s = (T_c + T_p)/2$.



Obr. 7. Parabolický teplotní profil v rotačně symetrickém tělese.

Závislost (15) splňuje teplotní okrajové podmínky, neboť pro $r = 0$:

$$\varrho = 0 \Rightarrow T(0) = 2T_s - T_p = 2\frac{T_c + T_p}{2} - T_p = T_c,$$

pro $r = R$:

$$\varrho = 1 \Rightarrow T(1) = 2\frac{T_c + T_p}{2} - T_p + 2T_p - 2\frac{T_c + T_p}{2} =$$

$$= T_c + T_p - T_p + 2T_p - T_c - T_p = T_p.$$

Poissonova rovnice pro výpočet termoelastického potenciálu posuvů (12), vyjádřená v kartézském systému souřadnic výrazem

$$\nabla^2 \Phi(x, y, z, \tau) = \frac{1 + \mu}{1 - \mu}\,\alpha T(x, y, z, \tau), \tag{16}$$

přejde po úpravě Laplaceova diferenciálního operátoru pro případ výpočtu v polárních souřadnicích a po zjednodušení pro stacionární rotačně symetrickou úlohu do tvaru

$$\frac{1}{\varrho}(\varrho\Phi') = \frac{1+\mu}{1-\mu}\alpha T(\varrho). \tag{17}$$

Po zavedení parabolické závislosti (15) pro teplotní pole na pravou stranu rovnice (17) se získá pro termoelastický potenciál posuvů $\Phi(\varrho)$ obyčejná diferenciální rovnice II. řádu

$$\frac{1}{\varrho}(\varrho\Phi')' = A + B\varrho^2, \tag{18}$$

ve které jsou označeny parametry na pravé straně

$$\frac{1+\mu}{1-\mu}\alpha(2T_s - T_p) = A,$$

$$2\frac{1+\mu}{1-\mu}\alpha(T_p - T_s) = B.$$

Postupnými úpravami rovnice (18) se pro termoelastický potenciál posuvů získá výraz:

$$\Phi = \frac{A}{4}\varrho^2 + \frac{B}{16}\varrho^4. \tag{19}$$

Vzhledem ke tvaru vztahů (14) pro složky teplotní napjatosti je možno v (19) položit integrační konstanty absolutního a lineárního členu rovny nule.

Vztahy pro výpočet složek napjatosti z termoelastického potenciálu (14), odvozené v předchozí kapitole, přejdou v případě výpočtu v polárním souřadném systému do výrazů

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= -\frac{E}{1+\mu}\frac{1}{\varrho}\frac{\partial\Phi}{\partial\varrho}, \\ \sigma_{tt} &= -\frac{E}{1+\mu}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varrho^2}. \end{aligned} \tag{20}$$

Po dosazení výrazu (19) do první rovnice (20) se pro radiální složku teplotní napjatosti získá výraz

$$\sigma_{rr} = -\frac{E}{1+\mu}\frac{1}{\varrho}\left(\frac{A\varrho}{2} + \frac{B\varrho^3}{4}\right). \tag{21}$$

Zpětným dosazením za A, B a jednoduchými algebraickými úpravami se postupně dojde ke vztahu

$$\sigma_{rr}(\varrho) = -\frac{E}{1+\mu}\cdot\frac{2A + B\varrho^2}{4} = -\frac{E}{4(1+\mu)}\left[2\frac{1+\mu}{1-\mu}\alpha(2T_s - T_p) + \right.$$

$$\left. + \frac{1+\mu}{1-\mu}\alpha\, 2(T_p - T_s)\varrho^2\right] = -\frac{E\alpha}{4(1-\mu)}[4T_s - 2T_p + 2(T_p - T_s)\varrho^2]. \tag{22}$$

Hodnota takto nalezeného radiálního napětí na povrchu válce je rovna

$$\sigma_{rr}(\varrho = 1) = -\frac{E\alpha}{2(1-\mu)}T_s. \tag{23}$$

Pro splnění okrajové podmínky na volném vnějším povrchu válce $\sigma_{rr}(\varrho = 1) = 0$ je proto nutné k řešení nalezenému pomocí termoelastického potenciálu přičíst vhodně zvolené řešení izotermické. V případě rotačního válce bez vnitřního otvoru je toto izotermické řešení triviální

$$\sigma_{rr}^{\text{izo}} = \sigma_{tt}^{\text{izo}} = \text{konst} = \text{C}.$$

Pro splnění okrajové podmínky je v tomto případě hodnota konstanty volena jako

$$C = -\sigma_{rr}(\varrho = 1) = \frac{E\alpha T_s}{2(1-\mu)}.$$

Spojením řešení z termoelastického potenciálu a řešení izotermického se pro radiální složku teplotní napjatosti získá výraz

$$\sigma_{rr}(\varrho) = -\frac{E\alpha}{4(1-\mu)}(4T_s - 2T_p + 2(T_p - T_s)\,\varrho^2) + \frac{E\alpha T_s}{2(1-\mu)}. \tag{24}$$

Po algebraických úpravách se postupně dojde k výslednému výrazu pro $\sigma_{rr}(\varrho)$

$$\sigma_{rr}(\varrho) = \frac{E\alpha}{2(1-\mu)}(T_p - T_s)(1 - \varrho^2). \tag{25}$$

Pro obvodovou složku teplotní napjatosti je možno analogickým postupem odvodit z druhé rovnice (20) partikulární řešení ve tvaru

$$\sigma_{tt} = -\frac{E\alpha}{4(1-\mu)}(4T_s - 2T_p + 6(T_p - T_s)\,\varrho^2).$$

Po sloučení s izotermickým řešením a po jednoduchých algebraických úpravách se pro tuto složku získá konečný výraz

$$\sigma_{tt}(\varrho) = \frac{E\alpha}{2(1-\mu)}(T_p - T_s)(1 - 3\varrho^2). \tag{26}$$

Pro výpočet třetího hlavního napětí, axiální složky σ_{zz}, se vychází ze zobecněného Hookova zákona ve tvaru

$$\varepsilon_{zz} = \frac{1}{E}[\sigma_{zz} - \mu(\sigma_{rr} + \sigma_{tt})] + \alpha\,\Delta T = \begin{cases} 0 \\ \text{konst} = C \end{cases} \tag{27}$$

Horní rovnost platí v případě rovinné napjatosti (tj. tehdy, je-li zabráněno volné osové deformaci na podstavách), dolní část vztahu (27) je třeba použít v případě tzv. zobecněné rovinné deformace (obě podstavy válce volné) [2].

(Výraz pro osové napětí lze z rovnice (27) napsat ve tvaru

$$\sigma_{zz} = \mu(\sigma_{rr} + \sigma_{tt}) - E\alpha\,\Delta T + \begin{cases} 0 \\ E\,.\,C \text{ — pro zobecněné rovinné přetvoření} \end{cases} \tag{28}$$

Numerickou hodnotu konstanty C, která figuruje ve výrazu pro osové napětí zobecněné rovinné úlohy, je třeba určit ze statické podmínky silové rovnováhy na podstavách válce, podle které je celková osová síla na povrchu rovna nule (jde o volný povrch)

$$N = \int_0^1 \sigma_{zz}(\varrho)\,2\pi\varrho\,\mathrm{d}\varrho = 0. \tag{29}$$

Dosadíme-li za funkce integrandu postupně vztahy (28) a (25), (26), přejde rovnice (29) do integrálu ve tvaru

$$0 = \int_0^1 \left[\frac{E\alpha}{1-\mu} (T_p - T_s)(1 - 2\varrho^2) - E\alpha(2T_s - T_p + 2(T_p - T_s)\varrho^2) + EC \right] \varrho \, d\varrho. \tag{30}$$

Provedením integrace (30) se po úpravě dojde k rovnici

$$0 = \frac{E\alpha}{1-\mu}(T_p - T_s)\left[\frac{\varrho^2}{2} - 2\frac{\varrho^2}{4}\right]_0^1 - E\alpha\left[(2T_s - T_p)\frac{\varrho^2}{2} + 2(T_p - T_s)\frac{\varrho^4}{4}\right]_0^1 + $$
$$+ EC\left[\frac{\varrho^2}{2}\right]_0^1,$$

ze které po dosazení mezí dále vyplývá

$$0 = -\alpha E(2T_s - T_p + T_p - T_s) + EC.$$

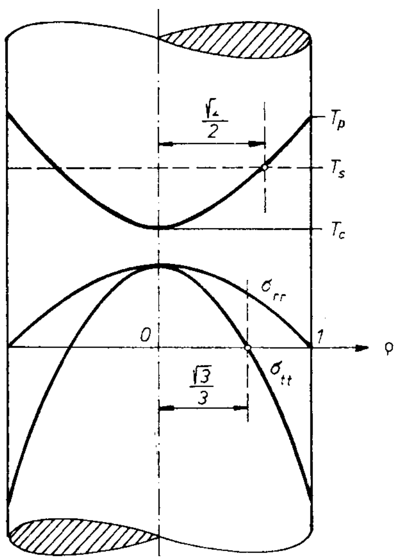
Hledaná konstanta C je odtud rovna

$$C = \alpha T_s. \tag{31}$$

Dosadíme-li tuto konstantu do výrazu (28), vychází pro axiální složku teplotní napjatosti zobecněné rovinné úlohy vztah

$$\sigma_{zz}(\varrho) = \frac{\mu E\alpha}{1-\mu}(T_p - T_s)(1 - 2\varrho^2) - E\alpha[2\varrho^2(T_p - T_s) - T_s]. \tag{32}$$

Grafické znázornění průběhu složek teplotní napjatosti nekonečného válce je uvedeno na obr. 8.



Obr. 8. Analytický průběh radiálního (σ_{rr}) a tangenciálního (σ_{tt}) teplotního napětí rotačně symetrického tělesa určeného podle vztahů (25) a (26).

ZÁVĚR

Cílem tohoto článku bylo ukázat odvození vztahů pro analytický výpočet složek teplotní napjatosti v homogenním rotačně symetrickém tělese se známým parabolickým teplotním polem druhého stupně, které se v tělese vytváří při lineárním ohřevu.

Omezení analytického postupu spočívá v tom, že nerespektuje teplotní závislost materiálových parametrů.

Je obecně známo, že parametry keramického materiálu jsou teplotně závislé. Přesto mají výsledné vztahy (25), (26) a (32) význam pro orientační odhad napjatosti rotačních keramických těles při výpalu. V praxi lze uvedený výpočet aplikovat např. pro získání kvalitativní představy o teplotní napjatosti ve velkorozměrných vysokonapěťových izolátorech. Bylo ukázáno, že charakter vypočtené napjatosti úzce souvisí s volnou teplotní deformací materiálu. Skutečnost, že dilatační chování keramického materiálu při výpalu je nelineární, způsobuje určitou nejednotnost v pevnostních výpočtech keramiky. V práci byla proto věnována značná pozornost způsobům vyjádření volné teplotní deformace materiálu, viz vztahy (1)—(6).

Seznam symbolů

E	Youngův modul pružnosti (Pa)
F_i	složka výsledné objemové síly (N)
l_0	referenční délka (m)
Δl	délková změna (m)
T_c	teplota ve středu tělesa (K)
T_p	teplota na povrchu tělesa (K)
ΔT	teplotní změna (K)
u_i	složka vektoru posunutí (m)
α	součinitel délkové teplotní roztažnosti (K^{-1})
δ_{ij}	Kroneckerův symbol
ε_{ij}	složka tenzoru deformace
μ	Poissonova konstanta
ν	hustota (kg m^{-3})
$\varrho = \frac{r}{R}$	relativní poloměr
σ_{ij}	složka tenzoru napětí (Pa)
τ	čas (s)

Literatura

[1] Kingery W. D.: *Introduction to Ceramics*, John Wiley & Sons, New York 1976.
[2] Timoshenko S. P., Goodier P.: *Theory of Elasticity*, McGraw—Hill, New York 1970.
[3] Ref P.: *Teplotní napětí*, skripta PGS, ČVUT—FSI, 1978.
[4] Reif P.: *Základy matematické teorie pružnosti*, skripta ČVUT—FSI, 198●.

РАСЧЕТ ТЕРМИЧЕСКОГО НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ КЕРАМИЧЕСКИХ ТЕЛ I

Милан Шварц*, Ивона Мазачова**, Владимир Ганыкирш**

**Государственный научно-исследовательский институт для конструкции машин Беховице, 190 00 Прага 9*

***Химико-технологический институт, Сухбатарова 5, 166 28 Прага 6*

На основании введения термоэластического потенциала смещений (см. уравнение [11]) приводится аналитическое решение линейного задания относительно напряженного состояния вращательно симметрического цилиндрического тела с данным параболическим распределением температуры. Окончательные отношения для отдельных компонентов термического напряженного состояния, выраженные уравнениями (25), (26), (32), выводятся при предположении, что можно пренебрегать температурной зависимостью параметров материала. Приводимые отношения служат для количественной оценки поведения керамического материала при обжиге. На основании решаемого примера доказывается, что они имеют большое значение для определения критических участков обжига вращательно симметрических тел с точки зрения термического напряженного состояния.

Особое внимание авторами уделяется способам расчета свободного теплового расширения системы. Рассматриваемые методы авторами применяются на несложном примере керамического материала, расширение которого в подобранном термическом интервале температуры оказывается нелинейным.

Рис. 1. Примеры трех видов ограничения свободного преобразования системы: a) внутренне статически определенная система, термическое напряженное состояние $\sigma_t = -E\alpha\Delta T$ возникает в результате статически неопределенного распределения, b) раз внутренне статически неопределенная система, c) бесконечно внутренне статически неопределенная система, преобразование которой связывается с условиями совместимости деформаций.

Рис. 2. Характеристический ход изменений дилатации керамического материала с повышенным содержанием Al_2O_3 в зависимости от температуры обжига.

Рис. 3. Способ расчета свободной термической деформации с применением термически зависимого коэффициента линейного расширения, выведенного из кривой линейных изменений материала согласно отношению (2).

Рис. 4. Способ расчета свободной термической деформации согласно уравнению (5).

Рис. 5. Пример образования осевого термического напряженного состояния в статически неопределенно установленном несущем элементе: a) установка несущего элемента, b) условие деформации.

Рис. 6. Схематический пример нелинейного расширения материала и выражение его свободной термической деформации.

Рис. 7. Параболический профиль температуры в вращательно симметрическом теле.

Рис. 8. Аналитический ход радиального (σ_{rr}) и касательного (σ_{tt}) термического напряжения вращательно симметрического тела, установленного согласно отношениям (25) и (26).

A CALCULATION OF THE THERMAL STRESS IN CERAMIC BODIES I

Milan Švarc*, Yvona Mazačová, Vladimír Hanykýř****

**National Research Institute for Machine Design, Běchovice, 190 00 Prague 9*

***Institute of Chemical Technology, 166 28 Prague 6*

On introduction of the thermoelastic potential of displacement, cf. equation (11), an analytical solution of the linear problem concerning the stress in a rotary symmetrical cylindrical body with a given parabolic temperature distribution was carried out. The resulting relationships for the individual components of thermal stress, expressed by equations (25), (26), (32), were derived on the assumption that the temperature dependence of the material parameters can be neglected. The relationships serve for qualitative assessment of the behaviour of cera-

mics on firing, and as indicated by the example presented, they can serve for determining the critical ranges of firing of rotary symmetrical bodies from the standpoint of thermal stresses.

Special attention is paid to the methods of calculating the free thermal expansion of the system. In a simple example, the methods are applied to a ceramic material whose expansion behaviour is non-linear over the temperature interval chosen.

Fig. 1. Example of three types of restricting the free deformation of a system;
a) the internaly statically determinate system; the thermal stress $\sigma_t = -E\alpha\,\Delta T$ *is due to a statically indeterminate mounting,*
b) once internaly statically indeterminate system,
c) indefinitely-times internaly statically indeterminate system, whose straining is bound by the conditions of deformations compatibility.

Fig. 2. Characteristic course of longitudinal changes in a ceramic material with increased Al_2O_3 *content in terms of firing temperature.*

Fig. 3. A method for calculating the free thermal deformations using the temperature-dependent thermal expansion coefficient established from the dilatancy curve of the material according to equation (2).

Fig. 4. A method for calculating the free thermal deformations according to equation (5).

Fig. 5. An example of the formation of axial thermal stress in a statically indeterminately mounted beam.
a) beam mounting, b) deformation condition.

Fig. 6. Schematic example of non-linear dilatancy behaviour of a material and expression of its free thermal deformation.

Fig. 7. Parabolic temperature profile in a rotary symmetrical body.

Fig. 8. Analytical radial (σ_{rr}) *and tangential* (σ_{tt}) *thermal stress curves in a rotary symmetrical body determined according to equations (25) and (26).*

VLIV POVRCHOVÝCH A KOLOIDNÍCH JEVŮ NA VLASTNOSTI ČERSTVÉHO BETONU.

Sympozium na toto téma se konalo jako část výroční schůze Material Research Society 1.—4. listopadu 1982 v Bostonu (Massachusetts, USA). Referáty o reologii betonu vyšly ve formě sborníku pod redakcí dr. J. Skalného a jsou rozděleny do čtyř sekcí:

1. Základní hlediska shrnující názory na vývoj mikrostruktury v čerstvé betonové směsi a na makroreologický i strukturně reologický popis jejího reologického chování.

2. Přístrojová technika — jsou popsány tři nové reometry vhodné pro studium reologického chování cementové kaše i betonové směsi: Kapilární, vibrační a přístroj založený na měření rychlosti ultrazvuku.

3. Zkušební metody a použití. Tato kapitola zahrnuje tři referáty o posuzování chování cementové kaše, malty a betonové směsi.

4. Chemické a minerální příměsi. Stať obsahuje souhrn referátů, z nichž prvé dva podávají výstižný přehled dnešních názorů na mechanismus působení různých příměsí na reologické chování cementových kaší, ostatní přinášejí zajímavé informace o řadě praktických aplikací.

5. Různé — přináší referát o vlivu jemnosti přírodního anhydritu na expanzi rozpínavých betonů a úvahu o vztazích mezi základním výzkumem koloidně chemických a reologických vlastností betonové směsi a posuzování její „zpracovatelnosti" v provozní praxi.

Z referátů je zřejmé, že se oblast reologie v poslední době dostala do popředí zájmu výzkumu. Je to proto, že reologie představuje metodu studia procesů, které se v cementové kaši odehrávají, a proto, že objev sterických stabilizátorů otevřel cestu přípravy betonů s vysokými pevnostmi.

Šatava