

## MATEMATICKÝ MODEL OBOUSTRANNÉHO TAVENÍ KMENE

PETR SCHILL

*Státní výzkumný ústav sklářský, 501 92 Hradec Králové*

Došlo 31. 5. 1985

*Předložený jednorozměrný evoluční matematický model umožňuje simulovat časový vývoj teplot ve vrstvě kmene při jejím oboustranném otavování v plamenné peci. Model zahrnuje kinetiku tavení a kontrakci tavící se vrstvy. Vlastní metoda je založena na spojitě přeměně kmene na sklovinu s tepelným propadem rozloženým v celé vrstvě. Kinetické parametry jsou odvozeny z měření TG a DTA, což podstatně přibližuje model reálné skutečnosti. Modelové rovnice jsou řešeny numericky, implicitní metodou při nerovnoměrné a časově proměnlivé diferenciaci. Aplikační příklad výpočtu byl proveden pro tavení modelové vrstvy kmene tloušťky 25 mm a je doplněn grafickým znázorněním časového vývoje profilů teplot, rychlostí otavování na obou rozhraních a průběhem kontrakce celé vrstvy.*

## ÚVOD

Znalost časového průběhu procesu tavení kmene má značný význam při optimalizaci nebo řízení celého technologického procesu ve sklářských pecích. Přímé sledování je z experimentálního hlediska značně obtížné a často i nemožné. Proto bylo započato se sestavováním matematických modelů, a to od jednoduchých verzí bilančního typu [1, 2, 3, 4], přes diferenční typy [5, 6, 7] až k poměrně složitým modelům zahrnujícím přímo i radiační složku přenosu tepla [8]. Všechny diferenční modely (kromě [7]) uvažují skokovou fázovou přeměnu (tzv. pásmové tavení), která vzhledem ke struktuře kmene příliš neodpovídá skutečnosti. Dále se většina modelů zabývala otavováním vrstvy kmene pouze z jedné strany.

Předložená práce se snaží řešit problém tavení kmene na základě reálnější představy spojitě přeměny kmene na sklovinu, zahrnující i kinetiku tavení. Přitom je nekonstantní tepelný propad rozprostřen v celé vrstvě kmene a proces přeměny kmene na sklovinu je potom nejintenzivnější v určitém teplotním intervalu (cca 200 °C) v okolí efektivní teploty tavení  $T_M$  (850 až 900 °C), která je určena vznikem první kapalně fáze (eutektik) v kmeni. Všechny materiálové vlastnosti kmene i skloviny jsou spojitými funkcemi teploty a popřípadě i stupně přeměny.

Navrhovaný matematický model je evoluční, jednorozměrný a simuluje časový vývoj rozložení teplot ve vrstvě kmene i ve sklovině (původní i nově vzniklé) od okamžiku založení na hladinu až do jeho úplného roztavení. Přitom zahrnuje proces otavování na dvou rozhraních, tj. na dolním povrchu (styk se sklovinou bazénu) a na horním povrchu (styk se spalovacím prostorem pece). Otázka mechanismu přestupu tepla ze spalovacího prostoru do kmene se v této práci neřeší a tepelný tok vstupující do kmene se považuje za daný.

Modelový výpočet je veden implicitním Grank-Nicolsonovým postupem při nerovnoměrné délkové diferenciaci. Pro vystižení kontrakce tavící se vrstvy se v každé časové hladině provádějí postupné korekce velikostí všech délkových diferenčních kroků, a to v závislosti na měnící se hustotě kmene a stupni přeměny.

## FYZIKÁLNÍ KONCEPCE MODELU

Uvažujme vrstvu kmene dané tloušťky  $S_B$  založenou v čase  $t = 0$  na hladinu skloviny, která má zadanou konstantní teplotu  $T_{GL}$ . Do této vrstvy kmene je přiváděno teplo jednak na její spodní stranu ze skloviny, a jednak na její horní stranu ze spalovacího prostoru pece. Přitom dochází k přeměně kmene na sklovinu nezávisle a současně z obou stran vrstvy.

Pro vytvoření rozumného matematického modelu je vhodné přijmout určitá fyzikální chemická zjednodušení. Především lze celý proces považovat za jedno-rozměrný, probíhající ve vertikálním směru (horizontální přenos tepla je zanedbatelný). Přestup tepla mezi kondenzovanou a vznikající plynou fází kmene lze považovat za relativně rychlý [7], tzn. že obě tyto fáze jsou prakticky stále teplotně vyrovnány, a do modelových rovnic vstupuje pouze „efektivní“ kondenzovaná fáze. Dále se předpokládá, že složité chemické reakce a fyzikální transformace probíhají spojitě a jsou rozprostřeny v celé vrstvě, takže tepelný propad lze v souladu s teorií kinetiky procesů [9] vyjádřit spojitou funkcí pomocí rychlosti přeměny [7]. Tento způsob modelování fázových přeměn má další výhodu v matematickém zpracování [10] a umožňuje i výpočty ve vícerozměrných oblastech. Nejintenzivnější přeměna kmene na sklovinu potom probíhá v okolí efektivní teploty tavení  $T_M$ , která je určena místem největší strmosti průběhu stupně přeměny.

Celý proces je rozdělen na dvě etapy: ohřívací a tavicí. Po založení vrstvy kmene na hladinu se mezi ním a sklovinou vytvoří tenká vzduchová vrstvička představující odpor pro tepelný tok  $Q_B$  ze skloviny do kmene. Tento tepelný tok je aproximován pomocí efektivního koeficientu přestupu tepla  $\beta$  vztahem  $Q_B = \beta \cdot \Delta T$ , kde  $\Delta T$  je rozdíl teplot stykových povrchů skloviny a kmene. S postupem času se zvětšuje  $\beta$  i  $Q_B$  a teplota dolního povrchu narůstá, až dosáhne hodnoty  $T_M$  a kmen se začíná otavovat. V dalším vývoji prudce klesá tepelný odpor ( $\beta$  roste), až se vyrovnají stykové teploty kmene a skloviny. V tomto okamžiku vymizí rozhraní a nastává tavicí etapa. Na horním povrchu kmene přechází ohřívací etapa v tavicí plynulým způsobem.

Přenos tepla v tavicí se vrstvě kmene i ve vzniklé sklovině se aproximuje kondukcí s koeficientem efektivní tepelné vodivosti, zahrnujícím radiační složku. Všechny materiálové vlastnosti kmene i skloviny lze experimentálně stanovit ve tvaru teplotních funkcí. Poslední aproximací je předpoklad, že utavená sklovina není odváděna, ale zůstává na svém místě v původní vrstvě kmene. Přitom se ale uvažuje změna hustoty a stupně přeměny, a tedy i změna tloušťky vrstvy v průběhu tavení.

Okrajové podmínky jsou určeny konstantní teplotou  $T_{GL}$  skloviny v dané hloubce pod kmenem a zadaným tepelným tokem  $Q_S$  vstupujícím do kmene (popřípadě do horní natavené vrstvičky skloviny) ze spalovacího prostoru pece.

## MODELOVÉ ROVNICE

Při sestavování modelových rovnic se vychází z bilance, která udává změny energie, jež proběhnou za čas  $\delta t$  v nepohyblivém objemu  $v$  uzavřeném plochou  $s$ :

$$\int_v \delta(\rho c T) dv = - \int_s q_{cn} ds \delta t - \int_v h_v dv \delta t, \quad (1)$$

kde je označeno:

$\delta(\rho c T)$  ( $J \cdot m^{-3}$ ) — změna akumulace tepla ( $\rho$  = hustota,  $c$  = měrné teplo),

$h_v$  ( $W \cdot m^{-3}$ ) — měrný objemový tepelný propad,

$q_{cn}$  ( $W \cdot m^{-2}$ ) — normálová složka hustoty konduktivního tepelného toku.

Tepelný propad lze vyjádřit ve tvaru

$$h_v = \rho H \dot{\alpha} = \frac{\delta(\rho H \alpha)}{\delta t}, \quad (2)$$

kde je označeno

$H$  ( $J \cdot kg^{-1}$ ) — hodnota celkového reakčně-transformačního tepla,

$\alpha$  — stupeň přeměny (pro zakládání, nezreagovaný kmen je  $\alpha = 0$ , pro přeměněný kmen na sklovinu je  $\alpha = 1$ ),

$\dot{\alpha} = d\alpha/dt$  ( $s^{-1}$ ) = rychlost přeměny,

Použitím vztahu (2) a Gaussovy věty pro výtok konduktivního tepla z objemu  $v$  přes uzavřenou plochu  $s$  přejde bilanční rovnice (1) na diferenciální rovnici

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho c T + \rho H \alpha) = -\text{div } \mathbf{q}_c. \quad (3)$$

Další úpravou levé strany rov. (3)

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho c T)}{\partial t} &= \rho c \frac{\partial T}{\partial t} + T \cdot \frac{d(\rho c)}{dT} \cdot \frac{\partial T}{\partial t}, \\ \frac{\partial(\rho H \alpha)}{\partial t} &= H \cdot \frac{d(\rho \alpha)}{dT} \cdot \frac{\partial T}{\partial t} \end{aligned}$$

vznikne pro jednorozměrný případ základní modelová rovnice (proměnná  $z$  je ve vertikálním směru)

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{R(T)} \cdot \frac{\partial}{\partial z} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial z} \right), \quad (4)$$

kteřá popisuje přenos tepla v kmeni i sklovině při spojitě fázové přeměně s kinetikou danou průběhem stupně přeměny  $\alpha(T)$ . Zde je  $\lambda$  [ $W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}$ ] součinitel efektivní tepelné vodivosti a spojitá funkce

$$R(T) = \rho(T) \cdot c(T) + T \cdot g(T) + H \cdot f(T) \quad (5)$$

představuje zobecněné objemové měrné teplo ( $J \cdot m^{-3} \cdot K^{-1}$ ) zahrnující efekty tepelného propadu. Přitom je nutná znalost průběhu funkcí

$$g(T) = \frac{d(\rho c)}{dT}; \quad f(T) = \frac{d(\rho \alpha)}{dT}, \quad (6)$$

kteřé lze stanovit experimentálně, např. postupem, jehož princip je uveden v [7] (využití TG a DTA měření).

Efektivní teplota tavení  $T_M$  se zde definuje místem největšího nárůstu stupně přeměny, jež je dáno polohou maxima funkce  $f(T) = d(\rho \alpha)/dT$ . Toto maximum se prakticky shoduje s maximem funkce  $R(T)$ . Průběh funkce  $R(T)$  tedy v podstatě charakterizuje intenzitu přeměny kmene na sklovinu, která je pro běžné kmeny největší v určitém teplotním intervalu (cca 200 K) v okolí  $T_M$  ( $T_M = 1123$  až 1173 K).

Jedna okrajová podmínka se týká skloviny pod kmenem a je dána konstantní teplotou  $T_{GL}$  v hloubce  $S_G$  pod hladinou. Druhou okrajovou podmínku představuje zadaný tepelný tok  $Q_S$  vstupující do horního povrchu kmene (nebo natavené nové vrstvičky skloviny) ze spalovacího prostoru pece a je vyjádřena rovnicí

$$R(T_S) \cdot \frac{D_S}{2} \cdot \frac{\partial T_S}{\partial t} = Q_S - \lambda_S \frac{\partial T_S}{\partial z}. \quad (7)$$

Index  $S$  označuje horní povrch. V ohřívací etapě je nutné na rozhraní kmen—sklovina uvažovat „vnitřní“ okrajovou podmínku, vyjadřující přestup tepla ze skloviny do kmene, určenou dvěma rovnicemi:

Pro stranu skloviny (index  $G$ ):

$$R(T_G) \cdot \frac{D_G}{2} \cdot \frac{\partial T_G}{\partial t} = -\beta(T_G - T_B) - \lambda_G \frac{\partial T_G}{\partial z}. \quad (8a)$$

a pro stranu kmene (index  $B$ ):

$$R(T_B) \cdot \frac{D_B}{2} \cdot \frac{\partial T_B}{\partial t} = \beta(T_G - T_B) + \lambda_B \frac{\partial T_B}{\partial z}. \quad (8b)$$

Symbole  $D_S$ ,  $D_G$ ,  $D_B$ ,  $T_S$ ,  $T_G$ ,  $T_B$  označují krajní difference a teploty na hranicích příslušných oblastí. Teplný tok přecházející ze skloviny přes vzduchovou vrstvičku do kmene je určen rovnicí

$$Q_B(t) = \beta(t) \cdot [T_G(t) - T_B(t)] = \beta(t) \cdot \Delta T(t), \quad (9)$$

kde efektivní koeficient přestupu tepla  $\beta(t)$  je aproximovaný poloempirickým vztahem

$$\beta(t) = \beta_0 \cdot \exp \{ \text{Min} [r(t), \sqrt{r(t)}] \}; \quad r(t) = \frac{\Delta T(0)}{\Delta T(t)} - 1 \quad (10)$$

a  $\beta_0$  je odhadnutá počáteční hodnota,  $\beta_0 \in (750, 3000) \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$ . V tavicí etapě, tj. od okamžiku vyrovnání teplot  $T_B$  a  $T_G$ , tato podmínka vymizí (jak bylo popsáno výše).

Při spojitě přeměně se kmen stavuje, a proto nelze zanedbat příslušnou změnu objemu. Pro velikost elementárního objemu  $\delta W$ , závisujícího na čase  $t$  a místě  $z$  ve vrstvě, byl odvozen vztah

$$\delta W(t, z) = \delta W(0, z) \cdot \frac{\rho_B(0)}{\rho(t, z)} \cdot [1 - \alpha(t, z) \cdot (1 - 1/p)], \quad (11)$$

kde  $\rho_B(0)$  je hustota založeného kmene v čase  $t = 0$  a  $p$  je koeficient tavení (hmotnostní poměr kmene k utavené sklovině). Tento vztah se při experimentální znalosti průběhu funkcí  $\rho(t, z) = \rho(T)$  a  $\alpha(t, z) = \alpha(T)$  aplikuje na výpočet korekcí diferenčních kroků v průběhu numerického řešení.

## ŘEŠENÍ MODELOVÝCH ROVNIC

Řešení modelové rovnice (4) s okrajovými podmínkami (7), (8a, b), (9) je provedeno diferenční metodou implicitním Crank-Nicolsonovým postupem s konstantním časovým krokem  $\delta t$  na nerovnoměrné soustavě  $N_S$  uzlových bodů.

Počáteční rozdělení uzlů je nutno volit s ohledem na podstatně větší tloušťku skloviny oproti založené vrstvě kmene a na existenci značného teplotního gradientu v okolí styku kmene se sklovinou v ohřívací etapě. Ve vrstvě kmene pro  $i = N_G \dots N_S$  je proto zadána konstantní difference  $D$  a ve sklovině pod kmenem pro  $i = 1, 2, \dots, (N_G - 1)$  potom nerovnoměrná diferenciace určená geometrickou posloupností

$$D_i = D \cdot b^{(N_G - 1 - i)} \quad (12)$$

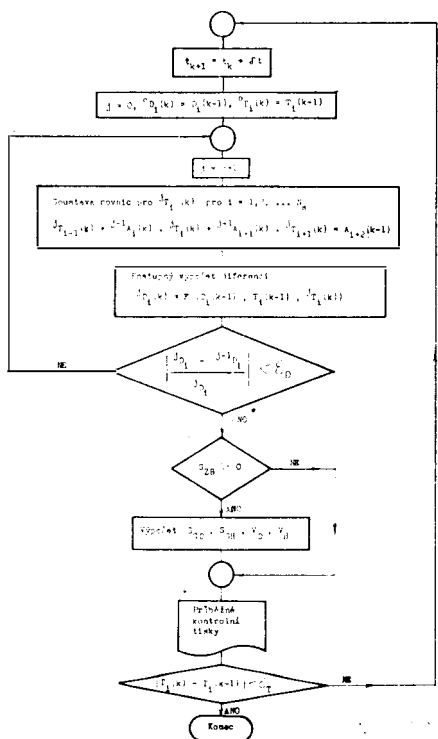
s kvocientem  $b > 1$  (počet uzlů ve sklovině je  $N_G$ ). Během výpočtu se v každé časové hladině  $t_k$  provádějí postupné korekce ( $j$ ) velikostí všech diferencí  ${}^jD_i(k)$  určené na základě vztahu (11) diferenčním výrazem

$${}^jD_i(k) = D_i(k-1) \cdot \frac{\rho(T_i(k-1))}{\rho({}^jT_i(k))} \cdot \frac{1 - \alpha({}^jT_i(k)) \cdot [1 - 1/p]}{1 - \alpha(T_i(k-1)) \cdot [1 - 1/p]} \quad (13)$$

Výpočet  $j$ -té aproximace uzlových teplot v  $k$ -té časové hladině, tj. teplot  ${}^jT_i(k)$  se provádí na základě znalosti hodnot  $T_i(k-1)$ ,  $D_i(k-1)$ ,  ${}^{j-1}D_i(k)$  řešením tridiagonální soustavy lineárních algebraických rovnic, vyplývajících z Crank-Nicolsonova implicitního schématu. Celý postup lze zjednodušeně vyjádřit vývojovým diagramem (obr. 1), kde je označeno:

- ${}^jA_i(k)$  – koeficienty diferenčních rozpisů rovnic (4) (7), (8a, b), (9),
- $\varepsilon_D$  – testovací hodnota pro ukončení postupných korekcí ( $j$ ),
- $\varepsilon_T$  – testovací hodnota pro dosažení ustáleného stavu,
- $S_{ZB}$  – zbytková tloušťka kmene,
- $S_{GD}, S_{GH}$  – celková tloušťka nové skloviny na dolní a horní straně kmene,
- $V_D, V_H$  – rychlost otavování dolní a horní strany kmene.

Veličiny  $S_{GD}, S_{GH}, V_D, V_H$  jsou vzhledem ke spojitě přeměně pouze ilustrativní a určeny na základě teploty  $T_M$ , která je považována za fiktivní hranici mezi sklovinou a kmenem. Rychlosti otavování  $V_D, V_H$  jsou určeny pomocí přírůstků



Obr. 1. Vývojový diagram výpočtu teplot  ${}^jT_i(k)$  a diferencí  ${}^jD_i(k)$ , kde  $i$  = uzlový bod,  $j$  = korekční krok,  $k$  = časová hladina.

„nové skloviny“ během časové diference  $\Delta t$ . Výpočet pokračuje i po „roztavení“ kmene (definovaném splněním podmínky  $T_i > T_M$  pro všechna  $i$ ), kdy se sklovina dotavuje a později pouze ohřívá, až do  $\varepsilon_T$  – přiblížení stacionárnímu stavu.

#### APLIKAČNÍ VÝPOČET

Stanovení materiálových vlastností kmene a skloviny potřebných pro modelový výpočet je poměrně pracnou záležitostí, a proto jsou dále uvedeny ve stručnosti pouze výsledné aproximace pro bílou obalovou sklovinu.

Reakčně transformační teplo  $H = 581$  kJ/kg kmene bylo určeno pomocí vztahu  $H = H_m/p + w \cdot H_w/100$ , kde  $H_m = 616,2$  kJ/kg skloviny je hodnota převzatá ze [7],  $H_w = 2257$  kJ/kg je výparné teplo vody\*,  $w = 2\%$  vlhkost zakládaného kmene a  $p = 1,15$  koeficient tavení.

Teplotní průběh stupně přeměny  $\alpha(T)$  a jeho derivace  $\alpha'(T)$  [K<sup>-1</sup>] byl určen na základě měření TG a DTA [7] a po stanovení  $T_M = 1146$  K,  $p = 1,15$  analyticky vyjádřen ve zjednodušeném tvaru

$$\alpha(T) = 0,6 + 0,1713 \cdot \operatorname{arctg} \frac{T - 1146}{12,5} + 0,1 \cdot \operatorname{arctg} \frac{T - 1075}{40}. \quad (14)$$

$$\alpha'(T) = \frac{0,0137}{1 + 4 \cdot \left(\frac{T - 1146}{25}\right)^2} + \frac{0,0025}{1 + 4 \cdot \left(\frac{T - 1075}{80}\right)^2}. \quad (15)$$

Součinitel efektivní tepelné vodivosti  $\lambda(T)$  [W · m<sup>-1</sup> · K<sup>-1</sup>] kmene a skloviny byl stanoven na základě měření [2, 11, 12] a korigován na radiační efekty v okolí teploty  $T_M$  podle výsledků práce [8]. Výsledná aproximace má tvar

$$\lambda(T) = \begin{cases} -0,001\,775 \cdot T - 0,1525 & \text{pro } T < 1100 \text{ K} \\ -0,0820 \cdot T - 88,40 & \text{pro } 1100 \text{ K} \leq T < 1200 \text{ K} \\ -0,4239 \cdot T - 438,7 & \text{pro } 1200 \text{ K} \leq T < 1350 \text{ K} \\ -1,679 \cdot 10^{-4} \cdot T^2 - 0,2291 \cdot T + 76,74 & \text{pro } T \geq 1350 \text{ K} \end{cases} \quad (16)$$

Měrné teplo  $c(T)$  [J · kg<sup>-1</sup> · K<sup>-1</sup>] bylo v oblasti kmene odhadnuto pomocí váženého součtu teplotních funkcí měrných tepel jednotlivých složek kmene [7, 13] a v oblasti skloviny stanoveno na základě měření [14, 15]. Výsledná aproximace je dána vztahem

$$c(T) = -2,9167 \cdot 10^{-4} + 1,025 \cdot T + 616,67; \quad T < 1757 \text{ K}. \quad (17)$$

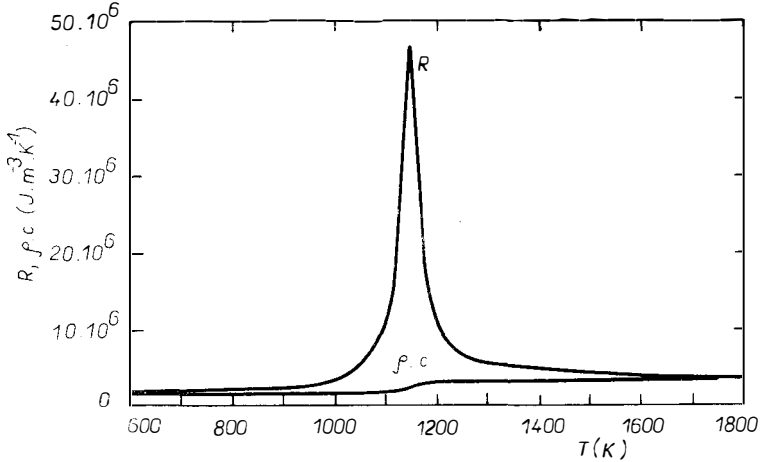
Hustota  $\rho(T)$  [kg · m<sup>-3</sup>] byla v oblasti kmene stanovena přímým měřením, v oblasti skloviny převzata z [16] a celkově aproximována funkcí

$$\rho(T) = \begin{cases} -0,1662 \cdot T + 1200,1 & \text{pro } 300 \text{ K} < T < 919 \text{ K} \\ -1860,0 + 347,1 \cdot \operatorname{arctg} \frac{T - 1146}{25} & \text{pro } 919 \text{ K} \leq T < 1459 \text{ K} \\ -0,164 \cdot T + 2617 & \text{pro } T \geq 1459 \text{ K} \end{cases} \quad (18)$$

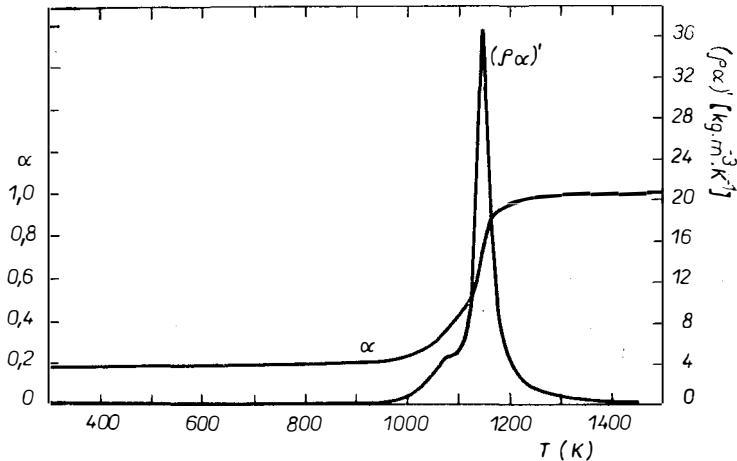
Materiálová funkce  $R(T)$ , představující zobecněné objemové měrné teplo (5), byla rovněž vyjádřena v analytickém tvaru. Z důvodů poměrné složitosti zápisu je zde

\* Jde o přibližnou hodnotu, protože teplotní závislost výparného tepla zde pro svůj malý vliv není uvažována.

uvedena pro  $H = 581 \text{ kJ/kg}$  kmene v grafickém vyjádření, a to pro porovnání současně se závislostí  $\rho(T) \cdot c(T)$  na obr. 2. Z dalších vlastností je na obr. 3 znázorněn průběh  $\alpha(T)$  spolu s teplotní derivací  $f(T) = (\rho\alpha)'$  a na obr. 4 průběh  $\lambda(T)$ .



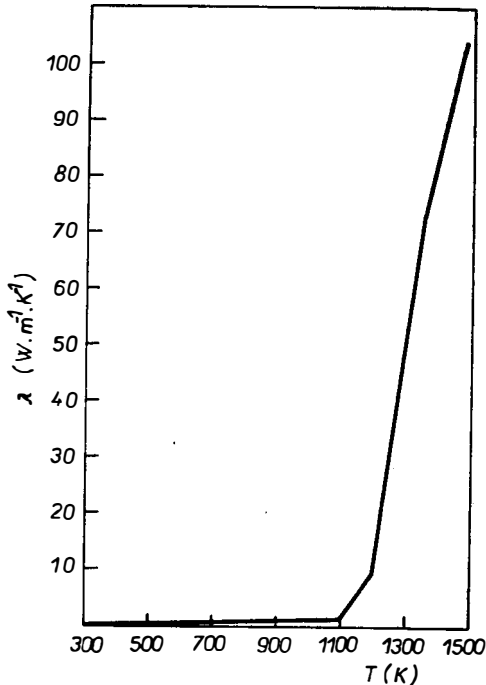
Obr. 2. Závislost zobecněného měrného tepla  $R$  a součinu  $\rho c$  na teplotě  $T$  pro  $H = 581 \text{ kJ/kg}$  kmene.



Obr. 3. Závislost stupně přeměny  $\alpha$  a funkce  $f = d(\rho\alpha)/dT$  na teplotě  $T$ .

Pro ilustraci funkce modelu je uveden výpočet pro tavení vrstvy kmene tloušťky  $S_B = 25 \text{ mm}$  s počáteční teplotou  $300 \text{ K}$  založené v čase  $t = 0$  na hladinu skloviny o počáteční teplotě  $T_{GL} = 1723 \text{ K}$ . V průběhu tavení je v hloubce  $S_G = 200 \text{ mm}$  pod hladinou teplota  $T_1 = T_{GL} = \text{const.}$  a hustota tepelného toku vstupujícího ze spalovacího prostoru do tavicího se kmene má hodnotu  $Q_S = 380 \text{ kW} \cdot \text{m}^{-2}$ . Celkový počet uzlů je  $N_S = 250$ , z toho pod hladinou  $N_G = 150$  a v tavicím se

kmeni  $N_S - N_G + 1 = 101$ . Počáteční diference v kmeni je  $D = 0,25$  mm a ve sklovině je diferenciacie určena vztahem (12), kde je  $b = 1,0235$  (první diference ve sklovině je  $D_1 = 4,739$  mm).



Obr. 4. Závislost součinitele efektivní tepelné vodivosti  $\lambda$  na teplotě  $T$  pro kmen i sklovinu.

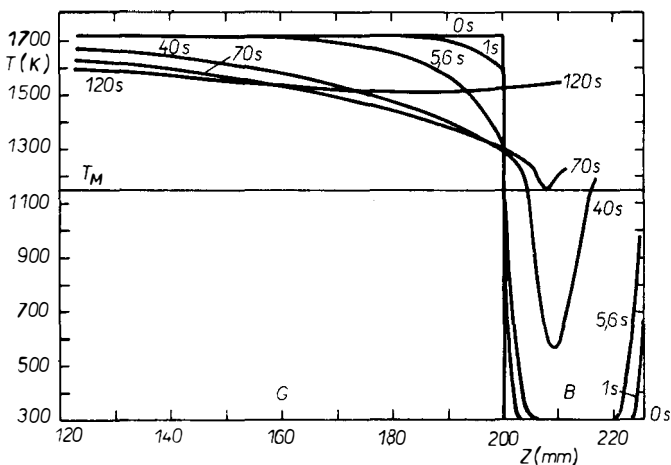
Pro koeficient přestupu tepla ze skloviny do kmene byl užit odhad podle vztahu (10) s počáteční hodnotou  $\beta_0 = 1500 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$ .

V ohřivací etapě (zadáno  $\delta t = 0,025$  s) dosáhla v čase  $t = 5,6$  s dolní strana kmene efektivní teploty tavení  $T_M = 1146$  K. V čase  $t = 5,8$  s došlo k vyrovnání stykových teplot kmene a skloviny a nastala tavicí etapa. V čase  $t = 17,4$  s dosáhla také horní strana kmene teploty  $T_M$ , a od tohoto okamžiku probíhalo otavování kmene z obou stran (časový krok postupně zvětšován až na hodnotu  $\delta t = 0,2$  s). V čase  $t = 71,8$  s došlo k „roztavení“ celé vrstvy kmene ( $T_i > T_M$  pro všechna  $i$ ), přičemž dolním tavením vzniklo 8,86 mm (tj. 73,3%) a horním tavením 3,22 mm (tj. 26,7%) nové skloviny. Další výpočet dotavování a ohřevu vzniklé skloviny byl prováděn až do času  $t = 120$  s, kdy průběh teplot ve staré a nové sklovině dosáhl plynulé, hladké návaznosti.

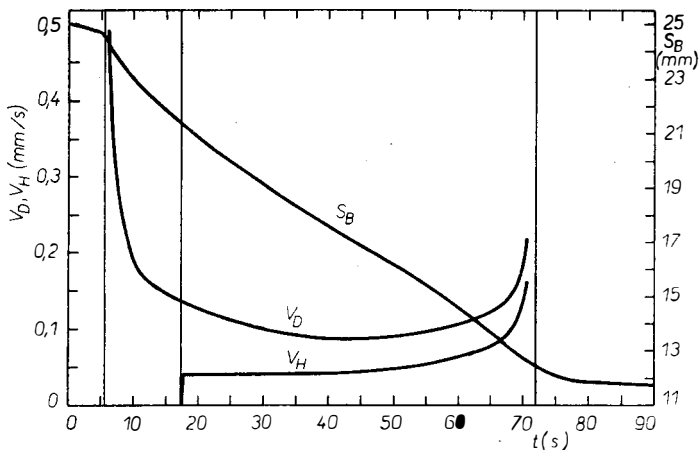
Hlavní výsledky výpočtu jsou pro názornost uvedeny v grafické formě. Na obr. 5 jsou pro vybrané hodnoty času  $t$  znázorněny teplotní profily v tavicí se vrstvě kmene (pro  $Z = 200$  až 225 mm) a ve sklovině pod kmenem (pro  $Z < 200$  mm). Teplotní křivky končí vždy na volném povrchu tavicí se vrstvy, čímž je zároveň znázorněna její kontrakce. Na obr. 6 je uveden časový vývoj rychlostí otavování obou stran a tloušťky vrstvy během celé přeměny kmene na sklovinu.



*Matematický model oboustranného tavení kmene*



Obr. 5. Časový vývoj profilů teplot  $T(Z)$  ve sklovině a kmene během tavení,  $T_M = 1146 \text{ K} =$  = efektivní teplota tavení,  $G$  = oblast sklovinu,  $B$  = oblast původně založeného kmene,  $Z = 200 \text{ mm} =$  = počáteční rozhraní kmen—sklovina.



Obr. 6. Časový průběh přeměny vrstvy kmene na sklovinu,  $V_D, V_H$  = rychlost tavení na dolní a horní straně kmene,  $S_B$  = tloušťka tavicí se vrstvy původně založeného kmene; svislé přímký:  $t = 5,6 \text{ s} =$  = začátek tavení zdola,  $t = 17,4 \text{ s} =$  = začátek tavení shora,  $t = 71,8 \text{ s} =$  = ukončení tavení.

**Z Á V Ě R**

Z časových závislostí na obr. 5 a 6 je zřejmé, že k nejvýznamnějšímu vývoji dochází na obou stranách kmene v prvních okamžicích po založení vrstvy na hladinu. Povrchy kmene se během několika sekund ohřejí na efektivní teplotu tavení  $T_M$ , a tím začíná jejich otavování. Na dolní straně klesá rychlost otavování z počátečních velkých hodnot nejprve prudce, později pozvolna a blíží se určité stabilní hodnotě.

Na horní straně dosáhne rychlost otavování své stabilní úrovně téměř okamžitě. Následuje poměrně pomalé prohrívání kmene s téměř konstantními rychlostmi otavování na obou stranách kmene (které nemusí být stejné). Rychlosti otavování ke konci procesu nejprve povolna, ale s klesající tloušťkou zbylé vrstvy kmene stále prudčeji rostou. Ke srovnatelným výsledkům (i kvantitativně) dospěl i Viskanta [8], který však modeloval pouze jednostranné horní tavení, ale s přímým uvážením radiálních efektů.

Již z tohoto stručného rozboru lze vyvodit praktický důsledek, který spočívá ve výhodnosti tavení většího množství tenčích, diskrétně zakládaných ostrůvků kmene než souvislé tlusté vrstvy. Jak plyne z modelového výpočtu, diskrétní hromádky kmene se budou rychle otavovat na svých tenkých okrajích, a přitom délka těchto okrajů je úměrná diskretizaci zakládání.

Uvedený matematický model bude dále uplatněn pro sérii výpočtů různých variant počátečních a okrajových podmínek ( $T_F$ ,  $T_{GL}$ ,  $S_B$ ,  $S_G$ ,  $Q_S$ ,  $\beta_0$ ) se sledováním jejich vlivu na rychlosti tavení. Mimoto ho lze poměrně snadno rozšířit i na více-rozměrné oblasti a modelově studovat např. tavení různých konkrétních forem zakládaného kmene. Dále může být využit jako součást matematických modelů návazných procesů ve sklovině, např. při simulaci teplotního a rychlostního pole, koncentračního pole zrn písku, nebo při činnosti zónového modelu spalovacího prostoru pece.

#### Literatura

- [1] Laptěv V. I.: *Stěklo (Trudy Instituta stěkla)* 33, 2 133 (1967).
- [2] Pugh A. C. P.: *Glastekniksk Tidskrift* 23, 95 (1968).
- [3] Austin M. J.: *Glass Technology* 11, 128 (1970).
- [4] Austin M. J., Bourne D. E.: *Glass Technology* 14, 78 (1973).
- [5] Mase H., Oda K.: *J. Non-Crystalline Solids* 38, 39, 807 (1980).
- [6] Fuhrmann H.: *Glastechn. Ber.* 46, 201, 209 (1973).
- [7] Schill P.: *Silikáty* 26, 155, 209 (1982).
- [8] Viskanta R., Wu X.: *Glastechn. Ber.* 56, 138 (1983).
- [9] Wendtland W. W.: *Thermal Methods of Analysis*, J. Wiley, New York—London—Sydney—Toronto 1974, ruský překlad, Moskva 1978, str. 189—212.
- [10] Meyer G. H.: *SIAM J. Numer. Anal.* 10, 522 (1973).
- [11] Kröger C.: *Glastechn. Ber.* 26, 202 (1953).
- [12] Blažek A., Endrýs J.: *Proc. 9th Int. Congress on Glass*, Versailles 1971, A17, s.735.
- [13] Barin I., Knacke ●.: *Thermochemical Properties of Inorganic Substances*, Springer-Verlag, Berlin—Heidelberg—New York 1973.
- [14] Babcock C. L., Mc Graw D. A.: *Glass Industry* 38, 137 (1957).
- [15] Tydlitát a kol.: *Glastechn. Ber.* 45, 352 (1972).
- [16] Staněk J.: *Elektrické tavení skla*, SNTL, Praha 1976.

### МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДВУСТОРОННЕЙ ВАРКИ ШИХТЫ

Петр ШИЛЛ

*Государственный научно-исследовательский институт стекла,  
501 92 Градец Кралово*

Предлагаемая одномерная эволюционная математическая модель позволяет симулировать временное развитие температур в варочном слое шихты и прилегающих областях стекломассы. Модельное уравнение (4) включает в 3-ем элементе функции  $R(T)$  обобщенной теплоемкости (5) кинетику варки и непрерывный тепловой сток. Таким образом превращение шихты в стекломассу распространено во всем слое шихты.

Краевые условия создают постоянная температура стекломассы  $T_{GL}$  в данной глубине  $S_G$  ниже шихты и данный тепловой поток  $Q_S$ , вступающий в шихту из пламенного пространства печи, уравнение (7).

Решение модельного уравнения (4) реализуется численным методом с помощью неявной Кранк-Николсоновой схемы при неравномерной дифференциации, переменной в зависимости от моментальной плотности и степени превращения шихты.

С помощью модели возможно изучать скорость оплавления на нижней и верхней сторонах шихты ( $V_D(t)$ ,  $V_H(t)$ ), тепловые профили  $T(z, t)$  и изменение толщины  $S_B(t)$  плавящегося слоя шихты. При исчислении  $V_D$ ,  $V_H$ ,  $S_B$  исходим из эффективной температуры варки  $T_M$ , определенной местом максимальной крутизны степени перемены  $\alpha(T)$  (отвечает образованию первых эвтектик). Из расчетов вытекает, что скорость варки на обеих сторонах шихты повышается в конце процесса, когда остаточная толщина  $S_{ZB}$  уже небольшая. Это показывает преимущество варки более малых, дискретных островков шихты в сравнении с толстым, компактным слоем.

*Рис. 1. Блок-схема расчета температур  $T_i(k)$  и разностей  $\Delta D_i(k)$  ( $i$  — узловая точка,  $j$  — последовательное приближение,  $k$  — временный слой)*

*Рис. 2. Зависимость обобщенной теплоемкости  $R$  и произведения  $\rho$  с от температуры  $T$  для  $H = 581$  кДж/кг шихты*

*Рис. 3. Зависимость степени превращения  $\alpha$  и функции  $f = d(\rho\alpha)/dT$  от температуры  $T$*

*Рис. 4. Зависимость эффективной теплопроводности  $\lambda$  от температуры  $T$  для шихты и стекломассы*

*Рис. 5. Временное развитие профилей температуры  $T(Z)$  в стекломассе и шихте в ходе варки;  $T_M = 1146$  К = эффективная температура варки,  $G$  = область стекломассы,  $B$  = область загруженной шихты в начале процесса,  $Z = 200$  мм = первоначальная граница раздела шихты — стекломасса*

*Рис. 6. Временное течение превращения слоя шихты в стекломассу;  $V_D$ ,  $V_H$  = скорость варки на нижней и верхней сторонах шихты,  $S_B$  = толщина варящегося слоя первоначально загруженной шихты, вертикальные прямые:  $t = 5,6$  с начало варки снизу,  $t = 17,4$  с начало варки сверху,  $t = 71,8$  с окончание варки*

## MATHEMATIC MODEL FOR TOP AND BOTTOM MELTING OF GLASS BATCH BLANKET

Petr Schill

*State Glass Research Institute, 501 92 Hradec Králové*

The present one-dimensional, evolutionary mathematic model enables to simulate the time development of temperature in a melting blanket of batch as well as adjacent zones of glass melt. The model equation (4) involves melting kinetics and a continuous heat sink in the 3rd member of the function  $R(T)$  of the generalized specific heat (5). In this way a conversion of batch to glass melt is spread across the total blanket of batch. The boundary conditions are determined by a constant glass melt temperature  $T_{GL}$  in a given depth  $S_G$  below batch and a given heat flux  $Q_S$  entering the glass batch from a combustion chamber of the furnace, see eq. (7).

The model equation (4) was numerically solved using the implicit Crank-Nicolson method on the grid with the non-uniform mesh size which is variable in dependence on the instantaneous local density and conversion stage.

By means of this model it is possible to study melting rates on the top and bottom of the batch blanket  $V_D(t)$ ,  $V_H(t)$ , temperature profiles  $T(z, t)$  and the thickness development  $S_B(t)$  of the blanket. Calculations of  $V_D$ ,  $V_H$ ,  $S_B$  are based on the effective melting temperature  $T_M$  which is given by maximum steepness of conversion stage  $\alpha(T)$  (it corresponds to the formation of first eutectica). It follows from calculations that melting rate of batch on both sides of the blanket increases in the end of process when the residual thickness  $S_{ZB}$  is very low. This proves an advantage of melting smaller discret regions of glass batch in contrast to melting the thick continuous blanket.

- Fig. 1. Program flow chart for calculations of temperatures  ${}^jT_i(k)$  and grid spacing  ${}^jD_i(k)$  ( $i$  = nodal point,  $j$  = correction step,  $k$  = time level).
- Fig. 2. Dependence of the generalized specific heat  $R$  and product  $qc$  on the temperature  $T$  for  $H = 581$  kJ/kg batch.
- Fig. 3. Dependence of the conversion stage  $\alpha$  and function  $f = d(q\alpha)/dT$  on the temperature  $T$ .
- Fig. 4. Dependence of the effective thermal conductivity  $\lambda$  on the temperature  $T$  for batch and glass melt.
- Fig. 5. Variation of temperature distributions  $T(Z)$  in the glass melt and batch with time during melting:  $T_M = 1146$  K = the effective melting temperature;  $G$  = glass melt zone;  $B$  = zone of the initially charged glass batch;  $Z = 200$  mm — initial position of glass/batch interface.
- Fig. 6. Time course of batch layer conversion to glass melt,  $V_D$ ,  $V_H$  = melting rates on the top and bottom of the batch layer,  $S_B$  = thickness of the melting layer; perpendicular straight lines:  $t = 5,6$  s = starting time of melting on the top side,  $t = 17,4$  s = starting time of melting on the bottom side,  $t = 71,8$  s = time of melting termination.

JIRÍ MILITKÝ: TVORBA MATEMATICKÝCH MODELŮ I. 144 str., 10 obr., 27 tab., Dům techniky ČSVTS, Ostrava 1983.

Tato účelová publikace je vlastně učebním textem pro účastníky stejnojmenného kurzu, který byl pořádán ostravským domem techniky v roce 1983. Je zaměřena na konstrukci lineárních regresních modelů a logický postup při hledání adekvátního popisu experimentálních dat.

Publikace je rozdělena na tři části. První část Modelování a regrese uvádí čtenáře do problematiky matematického modelování vůbec, hlavně však v souvislosti s korelační analýzou a tvorbou regresních modelů. Klasická metoda nejmenších čtverců je zde doplněna o analýzu předpokladů vedoucích k získání nejlepších nestranných odhadů regresních parametrů, o netradiční vyjádření kvality lineárních regresních modelů, o analýzu jednotlivých nezávisle proměnných, jejich bližší identifikaci a o metody vedoucí k odhalení všech významných faktorů.

Ve druhé části nazvané Regresní diagnostika jsou zařazeny metody, umožňující hlubší rozbor daného problému. Např. v kapitole Průzkumová analýza dat najde čtenář řadu grafických i statistických postupů zjišťování vlastností vyhodnocovaných údajů a zároveň i několik způsobů transformace dat, umožňující zlepšit jejich nevhodnou strukturu a tak odstranit nebo alespoň zmenšit neshodu s teoretickými předpoklady. Rovněž další uváděné kapitoly Analýza reziduí, Zjišťování multikolinearity a Identifikace vlivných bodů poskytují nové informace o modelu i datech, mimo jiné umožňují odhalit odlehle a extrémní body v experimentálních datech.

Závěr publikace tvoří třetí část — Tvorba regresních modelů. Stručně a přehledně shrnuje to, co bylo rozvedeno v předchozím textu a podává obecný postup vytváření těchto modelů. Jsou zde vytypovány jednotlivé fáze tvorby regresních modelů a je zde rovněž naznačen iterativní charakter jejich analýzy a postupného upřesňování.

V předkládané publikaci nenajde čtenář přehledné rozpisy, umožňující sestavit rozmanité modely a vyhodnotit je např. metodou nejmenších čtverců. Ostatně na toto téma již existuje dostatek literatury. Autor se věnuje pouze jednomu typu — lineární vícenásobné regresi — ale hlavní důraz klade na důkladnou analýzu problému. Mnohé z předkládaných metod nejsou uváděny v běžných matematicko-statistických příručkách a lze je nalézt jen roztroušeně v zahraničních časopisech. Též v praxi jsou tyto moderní metody opomíjeny, postrádáme je zpravidla i ve standardním programovém vybavení samočinných počítačů. Právě bouřlivý rozvoj výpočetní techniky způsobil, že dnes má široký okruh pracovníků možnost vyhodnocovat různé číselné údaje. Snadná dostupnost a samočinný výpočet, nevyžadující znalost problému, mají i svou negativní stránku — svádějí k mechanickému přejímání výsledků bez hlubší analýzy. Žel, i na stránkách tohoto časopisu jsme někdy toho svědky. Zmíněná publikace J. Militkého může napomoci k odstranění uvedeného nepříznivého jevu. Její text je hutný a mnohem čtenáři bude obtížné orientovat se v zápisech, důsledně vyjadřovaných v maticovém tvaru, ale námaha spojená s překonáváním těchto potíží se mnohonásobně vrátí v podobě účinného aparátu, umožňujícího vyhodnocovat experimenty na kvalitativně vyšší úrovni. Drobné chyby v textu, např. nesprávné číslování tabulek a grafů, rozhodně nesnižují úroveň ani význam publikace. Tak vlastně jejím jediným nedostatkem je malý náklad a do určité míry i nedokonalé reprodukcce převzatých tabulek.

*Skřivan*