

URČOVÁNÍ ZÁVISLOSTI MEZI NAPĚTÍM A RYCHLOSTÍ  
CREEPU PŘI ZKOUŠCE OHYBEM

JAROSLAV MENČÍK

Výzkumný ústav potravinářské a chladicí techniky,  
Resslova 956, 501 87 Hradec Králové

Došlo 11. 12. 1986

Rychlost poměrné deformace  $\dot{\epsilon}$  při ustáleném creepu závisí na napětí  $\sigma$  přibližně podle vztahu  $\dot{\epsilon} = k\sigma^n$ . Při určování konstant  $k$ ,  $n$  popř. hodnot  $\dot{\epsilon}$ ,  $\sigma$  ze zkoušek prováděných na vzorcích namáhaných ohybem, je nutno respektovat skutečnost, že  $\dot{\epsilon}$  i  $\sigma$  nabývají v různých místech vzorku různých hodnot. V předložené práci jsou odvozeny potřebné výpočetní vztahy. Výchoziskem pro analýzu naměřených hodnot je vztah mezi rychlostí charakteristické deformace  $\dot{w}$  a charakteristickým zatížením  $F$ ,  $\ln |\dot{w}/\dot{w}_0| = n \ln |F/F_0|$ , která platí zcela obecně, bez ohledu na způsob zatížení a deformování. Při odvození lze využít analogie mezi rychlostí deformování při creepu a velikostí deformace podobného tělesa z nelineárně elastického materiálu.

## ÚVOD

Charakteristickým rysem keramiky, vystavené dlouhodobému zatížení za vysokých teplot, je pomalé nevratné deformování, tzv. creep. Při ustáleném (sekundárním) stadiu creepu závisí rychlost poměrné deformace  $\dot{\epsilon}$  na napětí  $\sigma$  přibližně podle vztahu

$$\dot{\epsilon} = k\sigma^n, \quad (1)$$

kde  $k$ ,  $n$  jsou konstanty závislé na materiálu a teplotě. Znalost těchto konstant, zejména exponentu  $n$ , je důležitá jednak při navrhování výrobků pro dlouhodobé zatížení za vysokých teplot, jednak pro identifikaci mechanismů řídicích creep, což má význam při vývoji nových materiálů. K tomuto účelu se výraz (1) obvykle píše ve tvaru [1—3]

$$\dot{\epsilon} = A(DGB/KT) (B/d)^m (\sigma/G)^n, \quad (2)$$

kde  $A$  je bezrozměrná konstanta,  $D$  je difúzní koeficient (mající exponenciální teplotní závislost),  $G$  je modul pružnosti ve smyku,  $B$  je velikost Burgersova vektoru,  $K$  je Boltzmannova konstanta,  $T$  je teplota,  $d$  je střední velikost krystalů,  $m$  je koeficient reciproké velikosti krystalů a  $n$  je napěťový koeficient, známý již ze vztahu (1). Tento koeficient, podobně jako  $m$  a  $D$ , závisí na řídicím mechanismu creepu. Podrobný přehled hodnot pro různé případy je např. v [1—3]; uveďme pouze, že mřížkovým mechanismům creepu odpovídá zpravidla  $3 \leq n < 5$ , pro hraniční mechanismy je  $n < 3$ .

Konstanta  $n$  i další se stanovují experimentálně, z relace mezi napětím a rychlostí poměrné creepové deformace. Zkoušky creepu keramických materiálů se provádějí na vzorcích namáhaných zpravidla tlakem nebo ohybem, méně často tahem. Nejjednodušší poměry jsou v případě jednoosého tlaku nebo tahu, kdy rychlost poměrné deformace má v celém průřezu vzorku stejnou hodnotu,  $\dot{\epsilon} = \dot{w}/l$ , kde  $\dot{w} = dl/dt$  je rychlost prodlužování vzorku o délce  $l$ . Rovnoměrně rozložené je i napětí, pro které platí  $\sigma = F/S$ , kde  $F$  je osová síla a  $S$  průřez vzorku. Při určování napěťového exponentu  $n$  je proto možné vyjít ze vztahu (1), který se pro tento účel zpravidla upravuje na tvar

$$\ln |\dot{\epsilon}/\dot{\epsilon}_0| = n \ln |\sigma/\sigma_0|, \quad (3)$$

kde  $\dot{\epsilon}_0$ ,  $\sigma_0$  jsou vhodně volené normalizační konstanty. Dosazením hodnot  $\dot{\epsilon}$  stanovených pro různé velikosti  $\sigma$  a užitím metody nejmenších čtverců dostaneme hledanou hodnotu  $n$ . S ohledem na dříve uvedené relace lze stejně dobře užít vztahu

$$\ln |\dot{w}/\dot{w}_0| = n \ln |F/F_0|, \quad (4)$$

kde  $\dot{w}$  je rychlost celkové deformace,  $F$  je zatěžující síla a  $\dot{w}_0$ ,  $F_0$  jsou volené konstanty.

Při zkoušce ohybem je situace složitější, neboť napětí i rychlost poměrného prodlužování nabývá v různých místech vzorku různých hodnot. V dalším odvodíme vztahy potřebné pro tento případ.

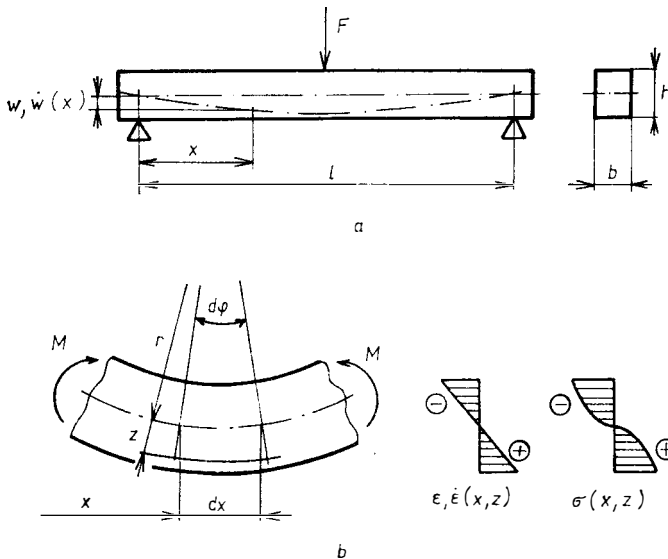
### TEORETICKÁ ČÁST

Zákon tečení (1) je analogický k deformačnímu zákonu pro nelineárně pružný materiál

$$\epsilon = k\sigma^n, \quad (5)$$

kde  $\epsilon$  je poměrné prodloužení. Z toho vyplývá, že v tělese, jehož materiál se v podmínkách creepu řídí vztahem (1), bude rozložení napětí, rychlostí poměrných deformací a rychlostí posuvů stejné, jako rozložení napětí, poměrných deformací a posuvů v nelineárně pružném tělese stejného tvaru a stejného způsobu zatížení i podepření [4—6]. Tato analogie umožňuje při řešení úloh creepu postupovat stejně jako při řešení úloh elastického deformování, popř. využívat již hotové výsledky.

Působením příčného zatížení (a příslušného ohybového momentu) se vzorek tvaru nosníku prohýbá. V obecném místě  $x$  má jeho neutrální osa, resp. střední plocha průhyb  $w(x)$  a křivost  $\alpha(x) = 1/r(x)$ , kde  $r$  je poloměr křivosti (obr. 1). Za



Obr. 1. Měření deformací při creepu metodou třibodového ohybu; a — všeobecné uspořádání zkoušky, b — deformace a napětí (schematicky).

předpokladu, že celkový průhyb je malý ve srovnání s tloušťkou nosníku  $h$  (která je opět malá vůči délce nosníku  $l$ ), lze pro okamžitou rychlost změny křivosti psát

$$\dot{\kappa}(x) = - \frac{d^2 \dot{w}(x)}{dx^2}, \quad (6)$$

kde  $\dot{w}(x)$  je rychlost prohýbání v místě  $x$ . Pro rychlost poměrného prodlužování „vlákna“ vzdáleného o  $z$  od neutrální roviny platí

$$\dot{\epsilon}(x, z) = \dot{\kappa}(x) z. \quad (7)$$

Kombinací (1) a (7) dostaneme rozložení napětí v nosníku

$$\sigma(x, z) = \sqrt[n]{\dot{\kappa}(x) z/k}. \quad (8)$$

POZNÁMKA. Vztahy (1), (2), (5) a (8) platí, přísně vzato, pouze pro  $\sigma \geq 0$ , a tedy i pro  $z \geq 0$ . Formálně správný zápis např. výrazu (1) by byl

$$\dot{\epsilon} = k \operatorname{sgn} \sigma |\sigma|^n, \quad (9)$$

kde  $\operatorname{sgn} \sigma$  vyjadřuje znaménko a  $|\sigma|$  absolutní hodnotu napětí. Podobně by bylo třeba upravit i další vztahy. V případě ohýbaného nosníku lze využít skutečnosti, že pro  $z < 0$  probíhá napětí antisymetricky, tj. platí

$$\sigma(z) = -\sigma(-z). \quad (10)$$

Napětí  $\sigma(x, z)$  v průřezu nosníku vyvozují ohybový moment

$$M(x) = \int_{(S)} \sigma(x, z) z dS = (\dot{\kappa}/k)^{1/n} \int_{(S)} z^{(n+1)/n} dS. \quad (11)$$

Výraz

$$J_n = \int_{(S)} z^{(n+1)/n} dS \quad (12)$$

představuje zobecněný moment setrvačnosti průřezu, který lze určit analyticky nebo numericky. Například pro obdélníkový průřez o šířce  $b$  a výšce  $h$  je (s přihlednutím k antisymetrii)

$$J_n = 2b \int_0^{h/2} z^{(n+1)/n} dz = \frac{2n}{2n+1} b \left(\frac{h}{2}\right)^{\frac{2n+1}{n}} \quad (13)$$

Pro lineárně viskózní materiál ( $n = 1$ ) dostaneme tzv. kvadratický moment setrvačnosti  $J$ , známý zejména v nauce o pružnosti; např. pro zmíněný obdélník platí  $J = bh^3/12$ .

Vyjádříme-li  $\dot{\kappa}$  v (6) prostřednictvím (11) a (12), dostaneme

$$-\frac{d^2 \dot{w}(x)}{dx^2} = -k M(x)^n / J_n^n. \quad (14)$$

Toto je základní rovnice, z níž se vychází při určování závislosti mezi zatížením a rychlostí průhybu.

Ke sledování deformačního chování keramických vzorků za vysokých teplot se často užívá metoda tříbodového ohybu [7], kdy vzorek volně podepřený na obou

koncích je uprostřed zatížen silou  $F$  (obr. 1). V takovém případě platí pro  $0 \leq x \leq l/2$  (neuvažujeme-li vlastní tíhu vzorku)

$$M(x) = Fx/2. \quad (15)$$

Vyjádríme-li takto  $M(x)$  v rovnici (14) a provedeme-li postupně dvojí integraci podle  $x$ , dostaneme (při okrajových podmínkách  $\dot{w}(x=0) = 0$ ,  $d\dot{w}/dx(x=l/2) = 0$ )

$$\dot{w}(x) = \frac{kF^n}{2^n(n+1)J_n^n} \left( \frac{x^{n+1}}{2^{n+1}} - \frac{x^{n+2}}{n+2} \right), \quad (16)$$

ke  $l$  je vzdálenost mezi podpěrami.

Rychlost prohýbání uprostřed vzorku je

$$\dot{w}(l/2) = \dot{w} = \frac{kl^{n+2}}{2^{2n+2}(n+2)J_n^n} F^n. \quad (17)$$

Mezi rychlostí prohýbání a zatížením tedy platí podobná relace jako mezi rychlostí poměrné deformace a napětím. Exponent  $n$  proto můžeme snadno určit ze vztahu (4), kam nyní dosazujeme experimentálně zjištěné rychlosti prohýbání  $\dot{w}$  při různých hodnotách zatěžující síly  $F$ .

Pro konstantu  $k$  platí podle (17)

$$k = \frac{2^{2n+2}(n+2)J_n^n}{l^{n+2}} \cdot \frac{\dot{w}}{F^n}. \quad (18)$$

Rychlost poměrné deformace  $\dot{\epsilon}$  dostaneme, vyjádříme-li  $x$  v rovnici (7) prostřednictvím vztahů (6) a (14), a vyjádříme-li dále  $k$  ze vztahu (18) a  $M(x)$  z (15). Pro průřez mezi podpěrami dostaneme po úpravě

$$\dot{\epsilon}(l/2, z) = 4(n+2) \dot{w}z/l^2. \quad (19)$$

Pro napětí ve stejném průřezu dostaneme kombinací (8), (14) a (15)

$$\sigma(l/2, z) = Flz^{1/n}/(4J_n). \quad (20)$$

Je vidět, že do vztahu (2), užívaného k podrobnějšímu zkoumání řídicího mechanismu creepu, můžeme dosazovat rychlost deformování  $\dot{\epsilon}$  v libovolném místě, dosadíme-li za  $\sigma$  napětí v tomtéž místě. Nejjednodušší je pracovat s hodnotami  $\dot{\epsilon}$ ,  $\sigma$  odpovídajícími povrchu vzorku, tj.  $z = h/2$ , kdy platí

$$\dot{\epsilon} = 2(n+2)h\dot{w}/l^2, \quad (21)$$

$$\sigma = Fl(h/2)^{1/n}/(4J_n). \quad (22)$$

Pro lineárně viskózní materiál ( $n = 1$ ) a vzorek obdélníkového průřezu se tyto výrazy dále zjednoduší

$$\dot{\epsilon} = 6h\dot{w}/l^2, \quad (23)$$

$$\sigma = 3Fl/(2bh^2). \quad (24)$$

Podobným způsobem je možné odvodit příslušné vztahy i pro jiné způsoby podepření nebo zatížení vzorku, např. pro metodu čtyřbodového ohybu. (Pro tento případ je charakteristické, že ohybový moment mezi vnitřními podpěrami je konstantní, takže se celá tato část vzorku prohýbá do tvaru kruhového oblouku.) Podrobnosti přenecháváme čtenáři; některé případy lze též nalézt v literatuře [4–6].

Uvedme pouze na závěr, že relace (4) mezi rychlostí charakteristické deformace a charakteristickým zatížením platí zcela obecně, bez ohledu na uspořádání zkoušky (s výjimkou případů, kdy deformování vede ke změně rozdělení vnitřních sil). Představuje proto základní východisko pro určování exponentu napěťové závislosti creepu a dalších veličin.

#### Literatura

- [1] Evans A. G., Langdon T. G.: *Structural ceramics*. Pergamon Press, New York, 1976 (Ruský překlad: *Konstrukcionnaja keramika, Metallurgija*, Moskva, 1980.)
- [2] Hanykýt V., Havrda J.: *Speciální technologie keramiky I*. VŠCHT, Praha, 1985.
- [3] Cannon W. R., Langdon T. G.: *J. Mater. Sci.* 18, 1 (1983).
- [4] Kačanov L. M.: *Teórij a polzučestí*. Gosizdat fiziko-matematičeskoj litěraty, Moskva, 1960.
- [5] Rabotnov J. N.: *Polzučest elementov konstrukcij*. Nauka, Moskva, 1966.
- [6] Höschl C.: *Vliv teploty na napjatost a pevnost částí*. DT ČSVTS, Praha, 1986.
- [7] Hanykýt V., Trávníček Z., Chýlek S.: *Silikáty* 29, 133 (1985).

#### DETERMINING THE RELATIONSHIP BETWEEN STRESS AND CREEP RATE DURING BENDING TEST

Jaroslav Menčík

Research Institute of Foodstuff and Refrigeration Technology, 501 87 Hradec Králové

The strain rate  $\dot{\epsilon}$  at steady-state creep depends on stress  $\sigma$  approximately according to the equation  $\dot{\epsilon} = k\sigma^n$ . In determining the constants  $k$ ,  $n$ , or the values of  $\dot{\epsilon}$ ,  $\sigma$  from tests on specimens stressed by bending, one should take into account the fact that both  $\dot{\epsilon}$  and  $\sigma$  have different values at different points of the specimen. The required relationships have been derived in the present study. The analysis of the values measured is based on the relationship between the rate of characteristic deformation  $\dot{w}$  and the characteristic load  $F$ , i.e.  $\ln |\dot{w}/\dot{w}_0| = n \ln |F/F_0|$ , which holds quite generally regardless of the kind of loading and the type of deformation. In the derivation, use can be made of the analogy between the deformation rate at creep and the degree of deformation of a similar body from a non-linearly elastic material.

Fig. 1. Measuring deformation at creep by the three-point bending method;

- a — general arrangement of the test,  
b — deformation and stress (schematically).

#### ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЗАВИСИМОСТИ МЕЖДУ НАПРЯЖЕНИЕМ И СКОРОСТЬЮ КРИПА ПРИ ИСПЫТАНИИ НА ИЗГИБ

Ярослав Менчик

Научно-исследовательский институт пищевой и холодильной техники  
501 87 Градец Кралове

Скорость относительной деформации  $\dot{\epsilon}$  при установившемся крипе зависит от напряжения  $\sigma$  приблизительно согласно отношению  $\dot{\epsilon} = k\sigma^n$ . При определении констант  $k$ ,  $n$  или величин  $\dot{\epsilon}$ ,  $\sigma$  на основании испытаний, проводимых на образцах под изгибающей нагрузкой, следует учитывать тот факт, что  $\dot{\epsilon}$  и  $\sigma$  достигают в разных местах образца разных величин. В предлагаемой работе выводятся необходимые отношения для расчета. Исходным пунктом для анализа измеренных величин является отношение между скоростью характеристической деформации  $\dot{w}$  и характеристической нагрузкой  $F$ ,  $\ln |\dot{w}/\dot{w}_0| = n \ln |F/F_0|$ , которое общесправедливо, не учитывая способ нагрузки

и деформирования. Для выведения можно использовать аналогии между скоростью деформирования при крипе и величиной деформации подобного тела, изготовленного из нелинейно эластического материала.

1. *Рис. Измерение деформаций при крипе с помощью метода трехточечного изгиба; а — общее проведение испытания, б — деформация и напряжение (схематически).*

HENCH, L. L.—ULRICH, D. R.: ULTRASTRUCTURE PROCESSING OF CERAMICS, GLASSES AND COMPOSITES. (Ultrastrukturní technologie keramiky, skel a kompozitů.) John Wiley and Sons, New York et al., 1984, XVIII + 564 s.

Kniha zahrnuje přednášky mezinárodní konference, která se konala 13.—17. února 1983 v Gainesville na Floridě. Konference se zúčastnilo přes 160 vědeckých pracovníků zejména z USA, Francie, Anglie, Itálie, Japonska, NSR.

Problematika, projednávaná na konferenci, je v knize rozdělena do 6 částí.

část	č. předn.	str.	
1	1—2	1—12	úvod
2	3—18	13—232	sol-gelová technologie
3	19—25	233—312	organokovové výchozí látky — prekursory
4	26—37	313—490	mikromorfologické technologie
5	38—40	491—532	technologie s fázovými přeměnami
6	41—42	533—558	měřicí metody
		559—564	věcný rejstřík

Moderní konstrukční řešení, vycházející z aplikace současných vědeckých poznatků, vyžadují i novou materiálovou základnu. Tomuto požadavku dnes již nevyhovují klasické materiály, připravované tradičními technologiemi. Dlouhodobé ověřování provozní jistoty konstrukčních materiálů je v současnosti nahrazováno používáním materiálů, připravovaných procesy, řízenými v každém technologickém uzlu jejich výroby.

V silikátovém průmyslu se tedy projevila tendence nepoužívat klasické surovinové základny, ale využívat všestranně definovaných syntetickýchsilikátových surovin, připravených sol-gelovými postupy. Tento přístup se ojedinělými pracemi objevuje na řadě odborných akcí již asi dvě desetiletí, avšak teprve v současnosti jsou mu věnovány samostatné odborné akce.

Recenzovaná kniha, přinášející materiály jedné z těchto konferencí, se pak jeví jako ucelený přehled současných problémů řešených v celosvětovém měřítku.

V úvodní části knihy zdůrazňují redaktoři HENCH a ULRICH vědecký, technický a ekonomický přístup k sol-gelovým technologiím a k jejich aplikaci nejen pro sklo a keramiku, ale i pro jiné speciální materiály.

Kniha je doplněna věcným rejstříkem.

Ze 42 prací, publikovaných v knize, nutno upozornit zejména na tyto přednášky:

- MACKENZIE, J. D.: Použití sol-gelových metod v technologii skla a keramiky,  
 ZARZYCKI, J.: Monolitické xerogely a aerogely pro procesy gel-sklo,  
 BRINKER, C. J.—SCHERER, G. W.: Vztah mezi konverzí sol-gel a gel-sklo,  
 PRASSAD, M.—HENCH, L. L.: Fyzikálně chemické faktory v sol-gelových technologiích,  
 GURKOVICH, S. R.—BLUM, J. B.: Příprava monolitického titaničitanu olovnatého sol-gelovým procesem,  
 MUKHERJEE, S. P.: Transparentní nekystalické povlaky kovových oxidů, získané sol-gelovým procesem,  
 ARFSTEN, M. J. et al.: Povlaky oxidů india a cínu, získané sol-gelovým postupem,  
 MAHLER, W.—CHOWDHRY, V.: Morfologická stadia tuhoucích gelů,  
 LEROY, E. et al.: Sol-gelová metoda přípravy vláken ZrO<sub>2</sub>,  
 BANEY, R. H.: Některé metody organokovů v keramice,  
 SEYFERT, H. D.—WISEMAN, G. H.: Silazany jako prekursor pro získání nitridu křemíku,  
 BEATY, Ch. L.: Nitrid a karbid křemíku z organokovů a z par prekursorů,  
 BARRINGER, E. et al.: Technologie monodisperzních prášků,  
 MATIJEVIC, E.: Monodisperzní koloidní oxidy, sulfidy a fosfáty. Nový materiál pro výzkum a aplikaci,  
 HALLORAN, J. W.: Aglomeráty a aglomerace v keramické technologii.

Kniha se stane významnou pomůckou všem pracovníkům, kteří se zabývají problematikou syntetických surovin pro silikátový průmysl.

Petrů