

RIEŠENIE STACIONÁRNEHO PRESTUPU TEPLA CEZ ROVINNÚ A VALCOVÚ STENU ITERAČNOU METÓDOU

VIKTOR ZÁBAVNÍK

Ústav výpočtovej techniky pri Vysokoj škole technickej, ul. Boženy Němcovej, 040 00 Košice

Došlo 10. 12. 1986

Riešenie stacionárneho prestupu tepla cez zloženú rovinnú, resp. valcovú stenu pre prípad lineárnej teplotnej závislosti tepelnej vodivosti vedie pri výpočte teplôt na stykoch vrstiev k riešeniu sústavy nelineárnych rovníc. Použitím iteračného prístupu je možné značne zjednodušiť riešenie uvedeného problému. Pri výpočte teplôt na stykoch vrstiev v smere od jedného povrchu steny k druhému riešime kvadratické rovnice, pričom hodnoty neznámych veličín je potrebné na začiatku iterácie predpokladať. Iteračný proces sa opakuje do dosiahnutia súladu medzi predpokladmi a hraničnými podmienkami. Algoritmus stanovenia teplotného profilu zostáva rovnaký pre rozdielne hraničné podmienky. Doba realizácie riešenia neprekročí 10 s na počítači SM 3.

1. ÚVOD

V predloženej práci sú uvedené poznatky o vypracovanom algoritme a programovej realizácii riešenia stacionárneho prestupu tepla cez n -vrstvovú rovinnú a valcovú stenu. Je ich možné použiť pre výpočet teplotného profilu vo viacvrstvovej stene, resp. tepelných strát cez ňu pre deväť rôznych kombinácií hraničných podmienok.

Daný problém je riešený v dvoch častiach. V prvej sú rozpracované teoretické základy vytýčeného problému. V druhej časti publikácie sa nachádzajú aplikácie vypracovanej metódy.

2. ROVINNÁ STENA

Jednorozmerný prestup tepla je popísaný diferenciálnou rovnicou (1)

$$q = -\lambda(T) \frac{dT}{dx}. \quad (1)$$

Pre stacionárne teplotné pole v rovinatej stene, schematicky znázornené na obr. 1, platí rovnosť hustôt tepelných tokov

$$q_0 = q_1 = q_2 = q_3 = q_4 = q = q_v. \quad (2)$$

Riešenie diferenciálnej rovnice (1) s uvažovaním lineárnej teplotnej závislosti vodivosti (3) pre prvú vrstvu steny dostaneme v tvare

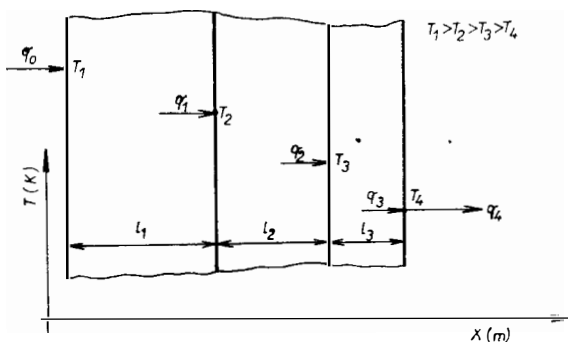
$$q = \left[a + \frac{b}{2} \cdot (T_1 + T_2) \right] \frac{(T_1 - T_2)}{l_1}, \quad (3)$$

$$\lambda(T) = a + bT. \quad (4)$$

Predpokladajme, že hodnota teploty na vnútornom povrchu a hustota tepelného toku je známa. Neznámou je teplota T_2 . Úpravou rovnice (3) za účelom stanovenia T_2 vyplýva

$$T_2 = \frac{-a + \sqrt{a^2 - 2b(ql_1 - aT_1 - \frac{1}{2}bT_1^2)}}{b}. \quad (5)$$

Teplota T_2 v (5) predstavuje koreň kvadratickej rovnice, ktorý má fyzikálnu interpretáciu.



Obr. 1. Schematické znázornenie rozmerových a tepelných pomerov v rovinatej stene.

Ak stena pozostáva z n -rozdielnych vrstiev a index i použijeme pre označenie jednotlivých vrstiev, potom vzťahy (3) a (5) je možné formulovať nasledovne

$$q = \left[a_i + \frac{b_i}{2} (T_{i+1} + T_i) \right] \frac{(T_i - T_{i+1})}{l_i}, \quad (6)$$

$$T_{i+1} = \frac{-a_i + \sqrt{a_i^2 - 2b_i \left(ql_i - a_i T_i - b_i T_i^2 \frac{1}{2} \right)}}{b_i}, \quad (7)$$

Pre hustotu tepelného toku nie je potrebné používať index, pretože platí podmienka (2).

3. VALCOVÁ STENA

Prestup tepla valcovou stenou popisuje diferenciálna rovnica (8).

$$Q^* = -2\pi r \lambda(T) \tau h \frac{dT}{dr}. \quad (8)$$

Tepelný tok Q je výhodné počítať za časovú jednotku pre jeden meter výšky ($h = 1$ m, $\tau = 1$ s). Potom platí pre Q

$$Q = -2\pi r \lambda(T) \frac{dT}{dr}. \quad (9)$$

Pre prípad stacionárneho prestupu tepla valcovou stenou platí podmienka

$$Q_0 = Q_1 = Q_2 = Q_3 = Q_4 = Q = Q_v. \quad (10)$$

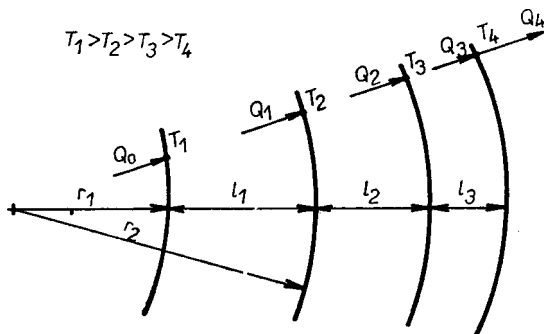
Použitím analogického postupu ako v prípade rovinatej steny dostaneme pre Q vzťah (11) a T_{i+1} vzťah (12).

$$Q = \left[a_i + \frac{b_i}{2} (T_1 + T_{i+1}) \right] \frac{(T_i - T_{i+1}) 2\pi}{\ln\left(\frac{r_{i+1}}{r_i}\right)}, \quad (11)$$

$$T_{i+1} = \frac{-a_i + \sqrt{a_i^2 - 2b_i \left[\frac{Q}{2\pi} \ln\left(\frac{r_{i+1}}{r_i}\right) - a_i T_i - \frac{b_i}{2} T_i^2 \right]}}{b_i}, \quad (12)$$

kde $r_{i+1} = r_i + l_i$

Pre fyzikálnu interpretáciu T_{i+1} platí rovnaká podmienka ako v prípade rovinatej steny.



Obr. 2. Schematické znázornenie rozmerových a tepelných pomerov vo valcovej stene.

4. HRANIČNÉ PODMIENKY

Hraničné podmienky, vo všeobecnosti rozdelené na štyri skupiny [1, 2], vzhľadom na ich vzájomné kombinácie sú vo vypracovanom riešení uvažované pre deväť rozdielnych usporiadaní. Hraničné podmienky, zahrnuté v riešení, sú tieto:

1. Zadané teploty na vnútornom a vonkajšom povrchu steny.
2. Zadaná hustota tepelného toku na vnútorný povrch a teplota vonkajšieho povrchu.
3. Zadaná teplota na vnútornom povrchu a hustota tepelného toku z vonkajšieho povrchu do okolia.
4. Zadaná hustota tepelného toku na vnútorný povrch, celkový súčiniteľ prestupu tepla α z vonkajšieho povrchu do okolia a teplota okolia.
5. Zadaná hustota tepelného toku na vnútorný povrch a teplota okolia.
6. Zadaná teplota pecného priestoru, celkový súčiniteľ prestupu tepla z pecného priestoru na vnútorný povrch a teplota vonkajšieho povrchu.
7. Zadaná teplota pecného priestoru, vypočítaná hustota tepelného toku z pecného priestoru na vnútorný povrch (pre predpokladanú teplotu vnútorného povrchu) a teplota vonkajšieho povrchu.

8. Zadaná teplota vonkajšieho povrchu, celkový súčiniteľ prestupu tepla z vonkajšieho povrchu do okolia a teplota okolia.

9. Zadaná teplota vonkajšieho povrchu, vypočítaný celkový súčiniteľ prestupu tepla a teplota okolia.

Pre stanovenie hustoty tepelného toku dopadajúceho z pecného priestoru na vnútorný povrch bol použitý vzorec

$$q_0 = 1,15 (T_{sp} - T_1)^{\frac{4}{3}} + 4,4 \cdot 10^{-8} (T_{sp}^4 - T_1^4). \quad (13)$$

Straty tepla reprezentované hustotou tepelného toku boli dané vzťahom

$$q_v = [K(T_n - T_0)^{-\frac{1}{4}} + 5,6696 \cdot 10^{-8} \varepsilon (T_n^4 - T_0^4)] (T_n - T_0). \quad (14)$$

Pre horizontálne uloženú stenu bolo použité $K = 3,26$; pre vertikálnu $K = 2,56$.

Hustota tepelného toku a celkový súčiniteľ prestupu tepla boli vzájomne prepočítané pomocou známeho vzťahu:

$$q = \alpha \Delta T.$$

5. ALGORITMUS RIEŠENIA

Algoritmus výpočtu teplôt v stene a tepelných strát cez ňu vychádza z definície hraničných podmienok. Jadro algoritmu tvoria vzorce (6), (7), resp. (11), (12). Napriek tomu, že existuje viacero spôsobov zadávania úlohy algoritmus riešenia je jediný. Toto bolo možné zabezpečiť jedine využitím iteračného prístupu k riešeniu problému.

Z hľadiska voľby iterovanej veličiny sa vo vypracovanom postupe riešenia problému rozlišujú dva rozdielne prístupy.

A. Pri známych teplotách na oboch povrchoch steny (prípád 4.1) je úlohou stanoviť priebeh teplôt v stene a straty tepla do okolia. Iterovanou veličinou je hustota tepelného toku, resp. tepelný tok. Algoritmus riešenia je nasledovný:

- predpoklad q na vnútornom povrchu
- výpočet teplôt na hraniciach vrstiev steny
- porovnanie absolútnej hodnoty rozdielu zadanej a vypočítanej teploty na vonkajšom povrchu s dovolenou nepresnosťou
- po splnení iteračnej podmienky (c) ukončenie iterácie, v opačnom prípade oprava predpokladu q a návrat na (b).

Podobný prípad predstavuje kombinácia hraničných podmienok (4.4).

B. V ostatných prípadoch je iterovanou veličinou teplota vnútorného povrchu výmurovky. Algoritmus riešenia je nasledovný:

- predpoklad teploty vnútorného povrchu steny T_1
- výpočet teplôt na hraniciach vrstiev
- porovnanie absolútnej hodnoty rozdielu vypočítanej a zadanej teploty na vonkajšom povrchu alebo absolútnej hodnoty rozdielu vypočítanej a zadanej teploty okolia, alebo absolútnej hodnoty rozdielu vypočítanej hustoty tepelného toku (resp. tepelného toku) a zadaneého odvodu tepla do okolia q_0 s dovolenou nepresnosťou
- po splnení iteračnej podmienky ukončenie iterácie, v opačnom prípade oprava T_1 a návrat na (b).

V prípade zadania hustoty tepelného toku na vnútornom povrchu steny (4.2, 4.5, 4.6) sa rozlišujú dva prípady:

- a) zadaná hustota tepelného toku v stacionárnom stave
- b) predpokladaná hustota tepelného toku v stacionárnom stave

Odlíšny algoritmus je použitý pre prípad hraničných podmienok (4.3). Teplotný profil v stene a straty tepla je možné pre tento prípad vypočítať bez použitia iteračného prístupu.

6. PRESNOST RIEŠENIA

Presnosť riešenia je možné posudzovať z dvoch hľadísk.

Prvé hľadisko predstavuje posúdenie presnosti riešenia pre zvolenú metódu reprezentovanú hodnotou dovolenej nepresnosti riešenia. Uvedená hodnota bola volená v závislosti na iterovanej veličine, teda rozdielna pre teplotu a hustotu tepelného toku. Vzhľadom na postup iterovania (od vnútorného povrchu k vonkajšiemu) sa hodnoty veličín postupne upravujú tak, aby sa v rámci dovolenej nepresnosti dosiahol stav odpovedajúci hraničnej podmienke na vonkajšom povrchu (pozri kap. 5 A—c, B—c). Teda na rozdiel od klasických iteračných metód nie sú porovnávané dve po sebe nasledujúce hodnoty iterovanej veličiny. Pri voľbe hodnoty dovolenej nepresnosti riešenia boli brané do úvahy nasledovné skutočnosti v súvislosti s požiadavkami zvýšenej presnosti:

- zvýšenie presnosti má za následok neúmerne narastanie počtu iterácií
- požiadavka zvýšenej presnosti musí byť v súlade so zobrazovacou schopnosťou počítača použitého pre riešenie

Hodnoty dovolených nepresností 1 K pre teplotu a 10 W m^{-2} (resp. 10 W) pre hustotu tepelného toku (resp. tepelný tok) predstavujú vyhovujúci kompromis medzi presnosťou a rýchlosťou riešenia.

Druhým aspektom je posúdenie presnosti z hľadiska zhody medzi vypracovaným modelom a skúmaným dejom. Pri skúmaní presnosti z tohto hľadiska je potrebné si uvedomiť tieto skutočnosti:

- pri všetkých kombináciách hraničných podmienok je presnosť riešenia ovplyvnená hodnotou tepelnej vodivosti materiálu
- vzorce (13), (14), reprezentujúce tepelnú výmenu medzi stenou a okolím, môžu zásadne ovplyvniť presnosť riešenia (ak sú použité).

7. PROGRAMOVÁ REALIZÁCIA ALGORITMU RIEŠENIA

Programová realizácia algoritmu riešenia je v programovacom jazyku FORTRAN IV. na počítači SM 3. Vypracovaný program registrovaný na ÚVT VŠT a SAV Košice pri VŠT Košice pod menom „STENA“ má modulárnu štruktúru. To umožňuje veľmi jednoduché a pohodlné prispôsobovanie algoritmu novým požiadavkám, ako napr.:

- zmena čiastkových modelov pre styk steny s okolím vzorce (13), (14), (15)
- zmena iteračnej metódy
- doplnenie nových hraničných podmienok
- použitie vypracovaného riešenia vo väčšom simulačnom celku

8. STANOVENIE TEPLOTNÉHO PROFILU A TEPELNÝCH STRÁT
V STENE ŠACHTOVEJ PECE

Stena vo vypaľovacom pásme šachtovej pece pozostáva z troch vrstiev žiaruvzdorného materiálu. Vrstvy sú usporiadané v smere od pracovného priestoru v poradí magnezit, šamot 1950, dinas 600. Hrúbky vrstiev a materiálové vlastnosti sú uvedené v tab. I. Zadané sú teploty vonkajšieho T_4 a vnútorného T_1 povrchu steny a vnútorný polomer steny $r_1 = 2,2$ m. Úlohou je stanoviť teplotný profil v stene, straty tepla do okolia a porovnať riešenie pre rovinný a valcový typ steny.

Tabuľka I

Charakteristiky vrstiev steny šachtovej pece

Index vrstvy	Materiál	Hrúbka [m]	λ [W m ⁻¹ K ⁻¹]	
			a	b
1	Magnezit	0,625	6,0476	$-2,907 \cdot 10^{-5}$
2	Šamot 1950	0,2	0,8025	$5,466 \cdot 10^{-4}$
3	Dinas 600	0,055	0,1046	$1,395 \cdot 10^{-4}$

Zo zadania úlohy vyplýva, že ide o typ hraničných podmienok 4.1. Vplyv oceľového plášťa na teplotné pole v stene je zanedbaný.

Výsledky riešenia boli získané na základe uvedených údajov a nachádzajú sa v tabuľke II.

Tabuľka II

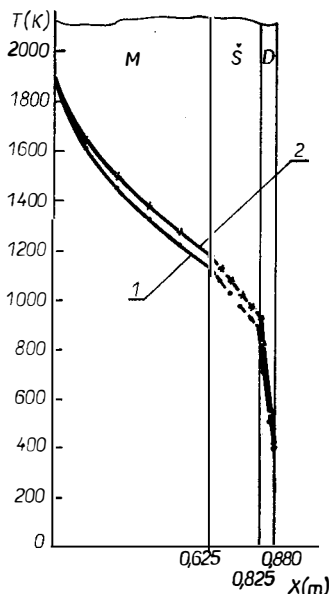
Výsledky riešenia pre stenu šachtovej pece

Index bodu	Vzdialenosť od vnútorného pov.	Valcový typ steny			Rovinný typ steny	
		T [K]	Q [W]	q[Wm ⁻²]	T [K]	q[Wm ⁻²]
1	0,000 m	1 914,00	31 881	2 306	1 914,00	1 826
2	0,625 m	1 131,15	31 881	1 796	1 178,52	1 826
3	0,825 m	874,15	31 881	1 677	912,70	1 826
4	0,880 m	402,15	31 881	1 647	401,17	1 826
Počet iterácií		55			8	
Čas riešenia [s]		8			1	

Výpočet bol realizovaný s dovolenou nepresnosťou 1 K. Teplotný profil v stene je znázornený na obr. 3. Pre ilustráciu vplyvu typu steny je uvedená hodnota q pre odpovedajúce body vo valcovej stene.

Porovnaním počtu iterácií (pozri tabuľku II) je možné konštatovať, že v prípade rovinatej steny bol začiatkový predpoklad q vhodne zvolený, zatiaľ čo v prípade valcovej steny toto tvrdenie neplatí.

Čas riešenia v tab. II predstavuje spotrebu strojového času v sekundách pre riešenie úlohy po zadaní vstupných údajov.



Obr. 3. Teplotný profil v stene šachtovej pece vypočítaný pro valcový (1) a rovinný (2) tvar steny; $M = \text{magnezit}$, $\dot{S} = \text{šamot 1950}$, $D = \text{dinas 600}$.

9. STANOVENIE TEPLoty VNÚTORNÉHO POVRCHU A TEPLÓT NA STYKoch IZOLAČNÝCH VRSTVIEV SPALOVACEJ KOMORY

Úlohou je stanoviť teploty na hraniciach jednotlivých vrstiev a vnútornej strane spaľovacej komory valcového tvaru s týmito charakteristikami:

vnútorný polomer steny — $r_1 = 0,2 \text{ m}$.

Známa je teplota na vonkajšom povrchu $T_4 = 453 \text{ K}$, $\epsilon_0 = 0,3$ a teplota okolia $T_0 = 293 \text{ K}$.

Tabulka III

Materiálové, rozmerové a vodivostné vlastnosti steny spaľovacej komory

Index vrstvy	Materiál vrstvy	Hrúbka vrstvy	$\lambda \text{ [W m}^{-1} \text{ K}^{-1}\text{]}$	
			a	b
1	žiarobeton	0,100 m	0,015 33	$0,175 76 \cdot 10^{-3}$
2	azbest	0,010 m	0,081 41	$1,860 8 \cdot 10^{-4}$
3	ocelový plášť	0,003 m	49,85	-0,031 29

Zadanie úlohy odpovedá typu hraničných podmienok 4.9. Pre výpočet α_0 bol použitý vzorec (14).

Výsledky získané simuláciou sú uvedené v tab. IV.

Tabuľka IV
Výsledky riešenia pre spaľovaciu komoru

Index bodu	Vzdialenosť od vnútorného povrchu [m]	Teplota [K]	Tepelný tok [W]
1	0,000	1754,25	4027,0
2	0,100	571,51	4027,0
3	0,110	452,57	4027,0
4	0,113	452,40	4026,7
Čas riešenia: 2 [s]		Počet iterácií: 13	

Riešenie bolo realizované s dovolenou nepresnosťou 1 K. To spôsobilo rozdiel 0,6 K medzi zadanou a vypočítanou teplotou vonkajšieho povrchu.

10. ZÁVER

Vypracovaný programový prostriedok umožňuje riešiť jednorozmerný stacionárny prestup tepla cez n -vrstvovú rovinnú alebo valcovú stenu pre deväť rozdielnych kombinácií hraničných podmienok. Použitie programového prostriedku je ilustrované na dvoch príkladoch.

Literatúra

- [1] Lykov A. B.: *Teória teploprovodnosti*, Vyššaja škola, Moskva 1967.
[2] Myers G. E.: *Analytical methods in condustion heat transfer*, McGraw Hill, New York 1971.

ZOZNAM POUŽITÉHO OZNAČENIA

T	teplota	[K]
T_n^*	zadaná hodnota teploty na vonkajšom povrchu	[K]
T_{sp}	teplota pecného priestoru	[K]
T_0	teplota okolia	[K]
T_n	vypočítaná hodnota teploty vonkajšieho povrchu	[K]
q	hustota tepelného toku	[W m ⁻²]
Q^*	teplo	[J]
Q	tepelný tok (teplo Q^* uvažované za 1 s na 1 m výšky steny)	[W]
λ	tepelná vodivosť	[W m ⁻¹ K ⁻¹]
a, b	absolútny a lineárny koeficient teplotnej závislosti tepelnej vodivosti	[W m ⁻¹ K ⁻¹]
i	index	[W m ⁻¹ K ⁻²]
n	počet izolačných vrstiev steny	
l	hrúbka izolačnej vrstvy	[m]

r_1	vnútorný polomer valcovej steny	[m]
h	výška steny	[m]
ε	stupeň černosti vonkajšieho povrchu	
α	celkový súčiniteľ prestupu tepla	[W m ⁻² K ⁻¹]

РЕШЕНИЕ СТАЦИОНАРНОЙ ТЕПЛОПЕРЕДАЧИ ЧЕРЕЗ ПЛОСКОСТНУЮ И ЦИЛИНДРИЧЕСКУЮ СТЕНУ С ПОМОЩЬЮ ИТЕРАЦИОННОГО МЕТОДА

Виктор Забавник

*Научно-исследовательский институт вычислительной техники
при Политехническом институте, ул. Божены Немцовой, 04000 Кошице*

Решение стационарной теплопередачи через сложенную стену при применении упрощающих предположений находит широкое применение на практике (напр. $\lambda = \text{const.}$). Для решения линейной зависимости теплопроводности задание определения температурного профиля для некоторых комбинаций предельных условий требуется решение системы нелинейных уравнений. Применяя итерационный прием, можно в значительной степени упростить решение приводимого задания. Таким образом при определении температурного профиля приходится решать квадратические уравнения. В течение итерационного процесса температурный профиль устанавливается для предполагаемых значений искомых величин и реализуется до достижения согласия между ними и заданными предельными условиями. Таким образом алгоритм является единственным для различных комбинаций предельных условий.

Разработанная программа имеет модулярную структуру, предоставляющую возможность весьма простого и пригодного приспособления новым требованиям, которыми чаще всего бывают новые предельные условия и далее использование в большем симуляционном целом.

Программа создана в языке FORTRAN IV, имплементированном на вычислительной машине SM 3.

Рис. 1. Схематическое изображение размерных и температурных отношений в плоскостной стене.

Рис. 2. Схематическое изображение размерных и температурных отношений в цилиндрической стене.

Рис. 3. Температурный профиль в стене шахтной печи, рассчитанный для цилиндрической (1) и плоскостной (2) формы стены; М — магnezит, S — шамот 1950, D — диаметр 600.

SOLUTION OF STATIONARY HEAT TRANSFER THROUGH PLANAR AND CYLINDRICAL WALLS WITH THE USE OF THE ITERATION METHOD

Viktor Zábavník

Institute of Computer Technology at the Technical University, ul. Boženy Němcovej, 040 00 Košice

The stationary heat transfer through a sandwich wall is a current problem being solved in practice with the use of simplifying assumptions (e.g. $\lambda = \text{const.}$). For a linear dependence of thermal conductivity, the problem of determining the temperature profile for some combinations of boundary conditions leads to the solution of a system of non-linear equations. The solution of the problem can be considerably simplified by using the iteration approach. In this way, quadratic equations have to be solved to determine the temperature profile. In the course of the iteration process, the temperature profile is determined for the assumed values of unknown quantities, and is concluded only on attainment of agreement between those and the initial boundary conditions. Thus a single algorithm is obtained for various combinations of the boundary conditions.

V. Zábavník:

The program suggested has a modular structure which allows it to be simply and conveniently adjusted to new requirements, which are mostly new boundary conditions; moreover, the program can be utilized within the framework of a wider simulation system.

The program has been written in the FORTRAN IV language and implemented on the SM 3 computer.

Fig. 1. Schematic representation of dimensional and thermal conditions in a planar wall.

Fig. 2. Schematic representation of dimensional and thermal conditions in a cylindrical wall.

Fig. 3. Temperature profile in the wall of a shaft furnace computed for a cylindrical (1) and planar (2) shape of the wall;

M = magnesite, Š = fireclay 1950, D = dinas 600.