

ROZBOR NAPĚtí V OCHRANNÝCH POVLACÍCH NA VÁLCOVÝCH A KULOVÝCH PLOCHÁCH

JAROSLAV MENČÍK

Výzkumný ústav potravinářské a chladicí techniky

Resslova 956, 501 87 Hradec Králové

Došlo 12. 5. 1987

Jsou uvedeny základní vztahy a postup výpočtu napěti ve válcích a koulích sestávajících ze dvou pevně spojených elasticích vrstev o rozdílných vlastnostech. Následuje podrobné řešení napjatosti, vyvolané rozdíly teplotních roztažností při změně teploty, a obecný postup při nehomogeném rozložení teplot, při zatížení vnitřního nebo vnějšího povrchu radiálním tlakem a při zatížení ohýbovým momentem. Je rozebrán vliv různých činitelů. Kromě elasticích a popř. tepelných vlastností se uplatňují tloušťky povrchové vrstvy a základu a jejich zakřivení. Při relativně malých tloušťkách povrchové vrstvy h vzhledem k tloušťce základu a k poloměru stýkné plochy b jsou poměry podobné jako u rovných desek s povrchovou vrstvou. Při poměrech $h/b > 0,1$ se navíc objevují radiální napěti, rozložení obvodových napěti napříč vrstvou získává hyperbolický průběh a je nutno užívat přesnějších výpočetních vztahů. Jsou diskutovány možnosti použití uvedené teorie pro povlaky na hranách a v koutech.

ÚVOD

Zvýšení odolnosti různých výrobků proti nepříznivým vlivům okolního prostředí se často docíluje vytvořením speciální povrchové keramické nebo skelné vrstvy s vysokou odolností chemickou nebo mechanickou, s velkým tepelným odporem apod. Následkem rozdílné teplotní roztažnosti a modulu pružnosti povrchové vrstvy a základu vznikají často v tělesech vnitřní pnutí již v průběhu výroby, a také při provozním zatížení mají napěti jiné rozložení a velikost než v podobných tělesech homogenních, bez ochranné vrstvy. Nerespektujeme-li tyto charakteristické vlastnosti při návrhu, může být někdy důsledkem vznik trhlinek nebo odlupování povrchové vrstvy a snížení životnosti i spolehlivosti celého výrobku.

Otázkám napětí v povlácích na tělesech jednoduchého tvaru (deskách apod.) byl nedávno v Silikátech věnován obšírný článek [1], kde jsou též citovány další práce. Velmi často se ochranné vrstvy vyskytují také na plochách zakřivených, jako jsou potrubí a různé nádoby, ale také hrany, rohy a kouty. Napjatost v těchto případech je složitější a rozložení napěti je často nepříznivější než u rovných desek. Je proto třeba vědět, čím se oba případy liší a kdy je nutno k vlivu zakřivení přihlížet.

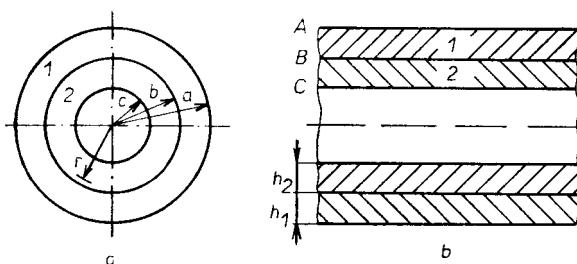
Všeobecné úvahy o chování povrchových vrstev na zakřivených plochách jsou např. v monografiích [2—4]. Základní kvantitativní představu můžeme získat z rozboru napjatosti pevně spojených souosých válců, popř. koulí s rotačně symetrickým zatížením. Obecné postupy a vztahy pro tento druh úloh lze nalézt v učebnicích a příručkách pružnosti a pevnosti [5—10]. Problematicce vnitřních pnutí ve spojených válcových tělesech ze skla nebo keramiky jsou věnovány např. práce [11, 12]. V [13] jsou odvozeny zjednodušené vztahy pro výpočet vnitřních napěti v duté kouli s povlakem na vnitřním nebo vnějším povrchu. Podobná úloha byla řešena v souvislosti s analýzou napjatosti keramického střepu, kde jsou v homogenní matrici dispergovány částice kulového tvaru [14, 15].

V předložené práci je naznačen obecný postup rozboru napětí v dvouvrstvých (dutých) válcích a koulích. Následují vztahy pro výpočet vnitřních napětí vyvolaných rozdíly teplotních roztažností základního materiálu a povrchové vrstvy. Na základě propočtu těchto napětí pro různé kombinace geometrií a elastických vlastností je diskutován vliv hlavních činitelů. Dále jsou rozebrány charakteristické znaky napjatosti při nehomogenném rozložení teplot a při mechanickém zatízení vnitřním, popř. vnějším přetlakem a ohybovým momentem. Zvláštní pozornost je věnována otázkám hran a koutů.

TEORETICKÁ ČÁST

Celkové uspořádání včetně označení je pro válec na obr. 1a, b, pro kouli na obr. 1a. Rozbor napjatosti provedeme za následujících předpokladů:

1. Vyšetřované těleso je obecně dvouvrstvé. Ochranná vrstva je na vnějším nebo vnitřním povrchu dutého válce, popř. koule ze základního materiálu.
2. Materiál povrchové vrstvy i základu je homogenní, s konstantními vlastnostmi nezávislými na souřadnicích.
3. Materiál obou vrstev se deformauje pružně podle Hookova zákona, přičemž napětí nikde nepřekročí mez kluzu ani mez pevnosti; obě vrstvy jsou stále pevně spojené.
4. Válec předpokládáme značně dlouhý a omezíme se na místa vzdálená od okrajů, kde je jejich vliv zanedbatelný.



Obr. 1. Dvouvrstvý válec a koule — všeobecné uspořádání; a — příčný řez válcem a kouli, b — podél řez válcem

Východiskem pro určování vnitřních pnutí, jakož i teplotních napětí nebo napětí vyvolaných radiálními tlaky v dvouvrstvých tělesech válcového nebo kulového tvaru, je obecná analýza napjatosti v dutém válci nebo kouli s rotačně symetrickým zatízením. Protože řešení těchto úloh je možno nalézt v různých učebnicích pružnosti a pevnosti, omezíme se zde na shrnutí výsledných vztahů. Připomeňme pouze, že se při odvozování vychází obecně z Hookova zákona, deformačních podmínek a rovnic rovnováhy sil, a že složitější způsoby zatízení lze řešit (při platnosti principu superpozice) jako součet řešení odpovídajících jednodušším způsobům zatízení.

Válec

Působí-li na vnější nebo vnitřní povrch dutého válce z homogenního materiálu napětí v radiálním směru (vyvozená např. tlakem pracovní látky nebo nemožností volných teplotních aj. dilatací), vznikají ve stěně radiální a obvodová (tangenciální) napětí o průběhu [5–10]:

$$\sigma_r(r) = K - \frac{M}{r^2} + f_r[T(r) - T_0], \quad (1)$$

$$\sigma_t(r) = K + \frac{M}{r^2} + f_t[T(r) - T_0]. \quad (2)$$

K, M jsou konstanty a f_r, f_t jsou určité funkce, závislé mj. na rozložení teplot $T(r)$. T_0 je teplota, při které předpokládáme teplotní napětí nulová. V nejdůležitějším případě homogenního rozložení teplot, $T(r) = T = \text{konst}$, je $f_r = 0, f_t = 0$, a pro konstanty K, M platí

$$K = \frac{\sigma_{re} r_e^2 - \sigma_{ri} r_i^2}{r_e^2 - r_i^2},$$

$$M = (\sigma_{re} - \sigma_{ri}) \frac{r_e^2 r_i^2}{r_e^2 - r_i^2}, \quad (3)$$

kde σ_{re} , σ_{ri} je radiální napětí* působící na vnější, resp. vnitřní povrch o poloměru r_e , resp. r_i .

Osové napětí je dánno obecným vztahem

$$\sigma_a(r) = C + f_a[T(r) - T_0], \quad (4)$$

kde C je konstanta a f_a je určitá funkce rozložení teploty. Při homogenném rozdělení teplot je $f_a = 0$ a osové napětí vzniká pouze tehdy, je-li válec zatížen v osovém směru (např. způsobem uvedeným výše). Jak vyplývá z (4), je v tomto případě rozloženo napříč průřezu rovnoměrně, $\sigma_a(r) = \sigma_a = \text{konst}$.

Uvedená napětí mají za následek zvětšení poloměru $u(r)$, které lze určit ze vztahu pro poměrné prodloužení v obvodovém směru,

$$\varepsilon_t(r) = \frac{u}{r} = \frac{1}{E} \{ \sigma_t(r) - \mu [\sigma_r(r) + \sigma_a(r)] \} + \alpha [T(r) - T_0], \quad (5)$$

kde α je součinitel délkové teplotní roztažnosti.

V místech vzdálených od okrajů se válec deformuje v osovém směru jako jeden celek a pro osové poměrné prodloužení platí

$$\varepsilon_a(r) = \varepsilon_a = \frac{1}{E} \{ \sigma_a(r) - \mu [\sigma_t(r) + \sigma_r(r)] \} + \alpha [T(r) - T_0]. \quad (6)$$

Koule

Působí-li na vnější nebo vnitřní povrch duté homogenní koule napětí radiálního směru (z příčin uvedených výše), vzniká ve stěně radiální a obvodové napětí [6, 9, 10]:

$$\sigma_r(r) = K' - \frac{M'}{r^3} + f'_r[T(r) - T_0], \quad (7)$$

*) Kladné, působí-li tah.

$$\sigma_t(r) = K' + \frac{M'}{2r^3} + f'_t[T(r) - T_0]. \quad (8)$$

K' , M' jsou konstanty a f'_r , f'_t jsou určité funkce rozložení teplot napříč stěnou. Při $T(r) = T = \text{konst}$ je $f'_r = f'_t = 0$ a pro konstanty K' , M' platí

$$K' = \frac{\sigma_{re} r_e^3 - \sigma_{ri} r_i^3}{r_e^3 - r_i^3},$$

$$M' = (\sigma_{re} - \sigma_{ri}) \frac{r_e^3 r_i^3}{r_e^3 - r_i^3}. \quad (9)$$

Označení σ_{re} , σ_{ri} , r_e , r_i mají význam jako dříve.

Zvětšení poloměru stanovíme ze vztahu

$$\varepsilon_t(r) = \frac{u}{r} = \frac{1}{E} \{ \sigma_t(r) - \mu [\sigma_r(r) + \sigma_t(r)] \} + \alpha [T(r) - T_0]. \quad (10)$$

Vztah (10) obráží skutečnost, že v každém bodě koule působí v radiálním směru napětí radiální σ_r a ve všech směrech k němu kolmých napětí obvodové σ_t . Osové napětí se zde nevyskytuje.

V dalším výkladu rozebereme charakteristické rysy napětí vznikajících z různých příčin.

NAPĚТИ ZPŮSOBENÁ ROZDÍLY TEPLITNÍCH ROZTAŽNOSTÍ

Tato napětí se vyskytují u výrobků, kde se povrchové vrstvy vytvářejí za vysokých teplot. Při následujícím chladnutí se vrstva s větší teplotní roztažností snaží zmenšit více svůj poloměr a v případě válce i svoji délku v osovém směru. Vrstva s menší roztažností tomu brání. To má za následek, že v obou vrstvách vznikají napětí radiální a obvodová (u válců také napětí osová), která v tělese zůstávají jako trvalá i po vyrovnaní teplot v celém objemu.

V dalším výkladu označíme veličiny týkající se vnějšího tělesa, resp. vrstvy indexem 1, vnitřního tělesa (vrstvy) indexem 2. Vnější poloměr tělesa 1 je a , poloměr styčné plochy obou vrstev je b , vnitřní poloměr je c (obr. 1). Odpovídající plochy označíme A , B , C . Teplotu celého tělesa předpokládáme konstantní, rovnou T .

Válec

Průběh radiálních a obvodových napětí v jednotlivých vrstvách je dán obecně vztahy (1) — (3)*), přičemž pro radiální napětí platí okrajové podmínky

$$\sigma_{r1}(r = a) = 0, \quad (11)$$

$$\sigma_{r2}(r = c) = 0, \quad (12)$$

$$\sigma_{r1}(r = b) = \sigma_{r2}(r = b) = \sigma_{rB}, \quad (13)$$

kde σ_{rB} je prozatím neznámá hodnota radiálního napětí ve styčné ploše. Dále platí, že obě (pevně spojené) vrstvy musí mít stejně zvětšení poloměru styčné plochy,

$$u_1(r = b) = u_2(r = b). \quad (14)$$

*) Platí $f_r = f_t = f_a = 0$.

Stejné musí být i poměrné prodloužení obou vrstev v osovém směru,

$$\varepsilon_{a1} = \varepsilon_{a2}. \quad (15)$$

Zároveň platí, že osová síla, kterou působí vrstva 1 na vrstvu 2, má stejnou velikost a opačný směr než osová síla, kterou působí vrstva 2 na vrstvu 1. Protože osové napětí nezávisí na r , můžeme tuto podmíinku zapsat ve tvaru

$$\pi(a^2 - b^2) \sigma_{a1} + \pi(b^2 - c^2) \sigma_{a2} = 0. \quad (16)$$

Šest podmínek (11)–(16), rozepsaných s užitím vztahů (1)–(6)*) tvoří soustavu šesti, resp. pěti lineárních rovnic o pěti neznámých: σ_{rB} , σ_{t1B} , σ_{t2B} , σ_{a1} , σ_{a2} . Tuto soustavu můžeme řešit buď přímo (pomocí vhodného programu na počítači), nebo můžeme zredukovat počet neznámých. Zvolíme-li za neznámé radiální napětí ve styčné ploše σ_{rB} a osové napětí σ_{a1} ve vrstvě 1, dostaneme následující soustavu dvou rovnic:

$$a_{11}\sigma_{rB} + a_{12}\sigma_{a1} = (\alpha_1 - \alpha_2)(T_0 - T), \quad (17)$$

$$a_{21}\sigma_{rB} + a_{22}\sigma_{a1} = (\alpha_1 - \alpha_2)(T_0 - T), \quad (18)$$

kde pro konstanty a_{11}, \dots platí

$$\begin{aligned} a_{11} &= -\left[\frac{1}{E_1}\left(\frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2} + \mu_1\right) + \frac{1}{E_2}\left(\frac{b^2 + c^2}{b^2 - c^2} - \mu_2\right)\right] \\ a_{12} &= -\left(\frac{\mu_1}{E_1} + \frac{\mu_2}{E_2} \cdot \frac{a^2 - b^2}{b^2 - c^2}\right), \\ a_{21} &= 2\left(\frac{\mu_1}{E_1} \cdot \frac{b^2}{a^2 - b^2} + \frac{\mu_2}{E_2} \cdot \frac{b^2}{b^2 - c^2}\right), \\ a_{22} &= \frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} \cdot \frac{a^2 - b^2}{b^2 - c^2}. \end{aligned} \quad (19)$$

S užitím Cramerova pravidla najdeme neznámé σ_{rB} , σ_{a1} podle vztahů

$$\sigma_{rB} = [\alpha_1 - \alpha_2](T_0 - T)(a_{22} - a_{12})/(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}), \quad (20)$$

$$\sigma_{a1} = (\alpha_1 - \alpha_2)(T_0 - T)(a_{11} - a_{21})/(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}). \quad (21)$$

Nyní můžeme určit radiální a obvodové napětí v libovolném místě, dosadíme-li do příslušného ze vztahů (1)–(3) hodnotu σ_{rB} z (20) a okrajové podmínky $\sigma_{rA} = 0$, $\sigma_{rC} = 0$ (viz poznámku dále). Protože však víme, že průběh těchto napětí je hyperbolický,** postačí znát jejich hodnoty na povrchu každé vrstvy. Zavedeme-li s ohledem na charakter vztahů (1)–(3), (16) a (19) bezrozměrné veličiny

$$\varphi_1 = a/b, \quad \varphi_2 = c/b, \quad (22)$$

*) Je nutno respektovat, že vnější vrstva má materiálové parametry E_1 , μ_1 , α_1 , vnitřní vrstva E_2 , μ_2 , α_2 . Teplota obou vrstev je T , výchozí teplota byla T_0 .

**) Závislost $y = kr^{-2}$ se označuje jako hyperbola druhého stupně, $y = kr^{-3}$ jako hyperbola třetího stupně.

dostaneme po úpravě charakteristické hodnoty obvodových napětí

$$\sigma_{t1A} = -\frac{2}{\varphi_1^2 - 1} \sigma_{rB}, \quad (23)$$

$$\sigma_{t1B} = -\frac{\varphi_1^2 + 1}{\varphi_1^2 - 1} \sigma_{rB}, \quad (24)$$

$$\sigma_{t2B} = \frac{1 + \varphi_2^2}{1 - \varphi_2^2} \sigma_{rB}, \quad (25)$$

$$\sigma_{t2C} = \frac{2}{1 - \varphi_2^2} \sigma_{rB}. \quad (26)$$

Pro osové napětí ve vrstvě 2 dostaneme z (16)

$$\sigma_{a2} = \frac{\varphi_1^2 - 1}{1 - \varphi_2^2} \sigma_{a1}. \quad (27)$$

POZNÁMKA. Okrajová podmínka $\sigma_{rC} = 0$ a vztahy (25), (26) platí jen v případě dutého vnitřního válce. Je-li tento válec plný, platí

$$\sigma_{r2}(r) = \sigma_{t2}(r) = \sigma_{rB} = \text{konst}, \quad (28)$$

tzn. v celém vnitřním válcu působí konstantní radiální i obvodové napětí, rovné σ_{rB} .

Řešení se dále zjednoduší, je-li Poissonovo číslo povrchové vrstvy i základu stejné, $\mu_1 = \mu_2 = \mu$. Pro tento případ dostaneme po úpravě následující vztahy:

$$\sigma_{rB} = -\frac{(\alpha_1 - \alpha_2)(T_0 - T)(1 + \mu)}{\frac{1}{E_1} \cdot \frac{1 + \varphi_1^2 - 2\mu^2}{\varphi_1^2 - 1} + \frac{1}{E_2} \cdot \frac{1 + \varphi_2^2 - 2\mu^2}{1 - \varphi_2^2} + \mu \left(\frac{1}{E_1} - \frac{1}{E_2} \right)}, \quad (29)$$

$$\sigma_{a1} = -\frac{\frac{1}{E_1} \cdot \frac{1 + \varphi_1^2 + 2\mu}{\varphi_1^2 - 1} + \frac{1}{E_2} \cdot \frac{1 + \varphi_2^2 + 2\mu}{1 - \varphi_2^2} + \mu \left(\frac{1}{E_1} - \frac{1}{E_2} \right)}{(1 + \mu) \left(\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} \cdot \frac{\varphi_1^2 - 1}{1 - \varphi_2^2} \right)} \sigma_{rB}; \quad (30)$$

ostatní napětí určíme podle vzorců (22)–(27). Podobně jako v [1] je možno vztahy (29), (30) upravit využitím E_1 a zavedením bezrozměrné veličiny $e = E_1/E_2$.

S poměrně malou chybou můžeme počítat napětí podle vztahů (29), (30) i při rozdílných Poissonových číslech, dosadíme-li pro obě vrstvy střední hodnotu $\mu = (\mu_1 + \mu_2)/2$.

Na obr. 2 je znázorněn průběh radiálních, obvodových i osových napětí ve dvouvrstvé válcové troubě. Velikost těchto napětí i jejich vzájemný poměr závisí na více činitelích a ze vztahů (19)–(30) jsou zřejmě pouze některé zákonitosti. Proto byla propočítána napětí pro různé kombinace tloušťky povrchové vrstvy, základu a poloměru styčné plochy, a pro různé poměry modulů pružnosti E_1/E_2 (za předpokladu $\mu_1 = \mu_2$). Protože nás bude zajímat srovnání velikosti napětí ve vrstvách na zakřivených plochách a na rovných deskách, zavedeme podobně jako v práci [1] redukovaná napětí σ_{rB}^* , σ_{t1A}^* , σ_{t1B}^* , σ_{t2B}^* , σ_{t2C}^* , σ_{a1}^* , σ_{a2}^* , definovaná jako podíl skutečného napětí a maximálního napětí, které by vzniklo ve velmi tenké vrstvě na rovné desce:

kde

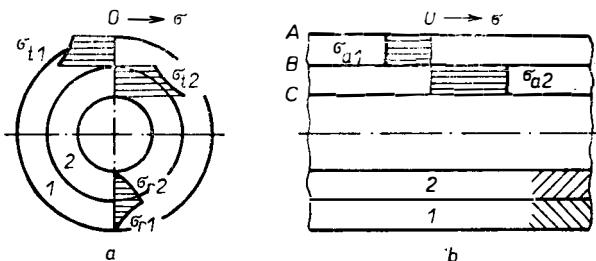
$$\sigma_{\max}^* = \sigma / \sigma_{1 \text{ max}}, \quad (32)$$

Redukovaná napětí σ_{rB}^* a σ_{a1}^* dostaneme vydelením vztahů (29), (30) výrazem (32). Pro napětí σ_{t1A}^* , σ_{t1B}^* , σ_{t2B}^* , σ_{t2C}^* a σ_{a2}^* platí vztahy (23)–(27), dosadíme-li do nich σ_{rB}^* místo σ_{rB} a σ_{a1}^* místo σ_{a1} . Dále označíme tloušťku vnější a vnitřní vrstvy*)

$$h_1 = a - b, \quad h_2 = b - c, \quad (33)$$

přičemž platí

$$\varphi_1 = (h_1/b) + 1, \quad \varphi_2 = 1 - (h_2/b). \quad (34)$$



Obr. 2. Rozložení napětí v dvouvrstvém válcovém rozdílem teplotní roztažnosti vnitřní a vnější vrstvy (schematicky); a – příčný řez, b – podélný řez. Obr. 2a platí i pro dvouvrstvou kouli. σ – radiální napětí, σ_t – obvodové napětí, σ_a – osové napětí. Index 1, 2 označuje vnější, resp. vnitřní vrstvu.

Charakteristické průběhy redukovaných napětí v závislosti na h_1/b a dalších veličinách jsou na obrázcích 3, 4. Ze vzorců a z numerických výsledků vyplynula řada důležitých poznatků:

1. Radiální napětí v každém z vrstev má obecně hyperbolický průběh, s nulovou hodnotou na volném povrchu (vnějším, popř. vnitřním u dutého válce) a s maximální hodnotou σ_{rB} na styčné ploše základního tělesa a ochranné vrstvy. U plného válce (č. 2) má vždy radiální napětí v celém válcovém konstantní hodnotu $\sigma_{r2}(r) = \sigma_{rB}$.
2. Obvodová napětí mají obecně rovněž hyperbolický průběh s maximální hodnotou vždy na vnitřním povrchu příslušné vrstvy. U plného válce má obvodové napětí konstantní hodnotu, $\sigma_{t2}(r) = \sigma_{rB}$.

3. Součet obvodového a radiálního napětí je vždy pro danou vrstvu konstantní, nezávislý na r .

4. Osové napětí je v každé vrstvě konstantní, nezávislé na r .

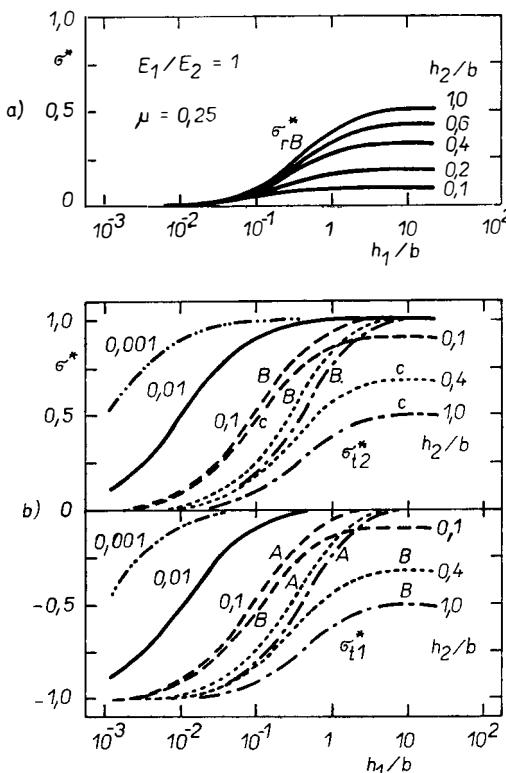
5. Všechna napětí jsou přímo úměrná rozdílu součinitelů délkových teplotních roztažností obou vrstev ($\alpha_1 - \alpha_2$) a teplotnímu intervalu ($T_0 - T$), během něhož se tvoří.

6. Ve vrstvě s větším součinitelem teplotní roztažnosti je při $(T_0 - T) > 0$ obvodové i osové napětí vždy tahové. Ve vrstvě s menší roztažností jsou tato napětí vždy tlakové. Radiální napětí v obou vrstvách (i na styčné ploše) má vždy stejně znaménko jako obvodové napětí ve vnitřní vrstvě.

*) Na rozdíl od práce [1] zde index 1,2 nerozlišuje povrchovou vrstvu a základ, ale vnější a vnitřní vrstvu.

7. Všechna napětí jsou tím větší, cíím větší je modul pružnosti jakékoliv z vrstev (závislost však není lineární). Rovněž jsou tím větší, cíím větší je Poissonovo číslo. S ohledem na možné rozmezí μ je tento vliv poměrně malý.

8. Velmi významný je vliv tloušťek a křivostí obou vrstev. Přitom napětí vyvolaná rozdíly teplotních roztažností nezávisí na samotné tloušťce některé z vrstev, ale na vzájemném poměru tloušťky obou vrstev a současně na poměru tloušťky kterékoli z vrstev k poloměru styčné plochy, popř. na poměru tloušťky každé z vrstev k poloměru styčné plochy (resp. k jinému charakteristickému poloměru).*)



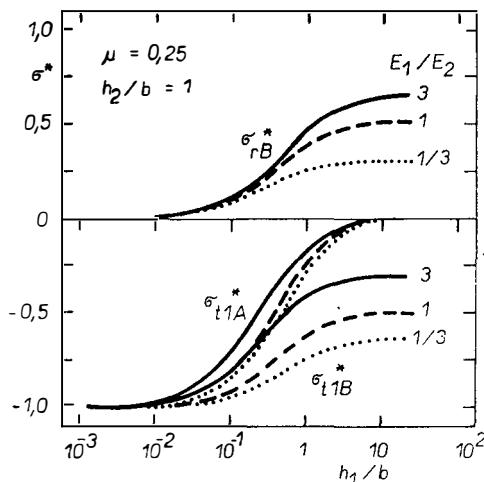
Obr. 3. Napětí v dvouvrstvém válcu vyvolaná rozdíly teplotních roztažnosti – závislost na poměru tloušťky vnější a vnitřní vrstvy k poloměru styčné plochy při $E_1 = E_2$, $\mu_1 = \mu_2$. σ^* – redukované napětí; pro shodné napětí platí $\sigma = \sigma^*(\alpha_1 - \alpha_2)(T_0 - T)E_1/(I - \mu)$. E – modul pružnosti v tahu, μ – Poissonovo číslo, h – tloušťka vrstvy, b – poloměr styčné plochy. Index 1, 2 označuje vnější resp. vnitřní vrstvu.

- a) — průběh redukovaného radiálního napětí σ_{rB}^* ve styčné ploše obou vrstev,
 b) — průběh redukovaných obvodových napětí σ_t^* ve vrstvě 1 a 2. — .. — .. — $-h/b = 0,001$,
 $h/b = 0,01$, — — — $h/b = 0,1$, — · · · · · $h/b = 0,4$, — · · · · · — · · · · · $h/b = 1,0$. Písmena označují místo, ve kterém působí jednotlivá napětí:

A – vnější povrch vrstvy 1, B – styčná plocha vrstvy 1 a 2, C – vnitřní povrch vrstvy 2. Při $h_2/b = 0,001$ a $0,01$ jsou napětí σ_{t1} a σ_{t2} ve celé vrstvě prakticky konstantní, při $h_2/b = 1$ odpovídá σ_{t2C} napětí na vnitřním povrchu dutého válce s otvorem o „nulovém“ poloměru; pro plný válec platí $\sigma_{t2C} = \sigma_{rB}$ (viz obr. 3a). Při $E_1 = E_2$ platí $\sigma_{a1} = \sigma_{t1A}$, $\sigma_{a2} = \sigma_{t2C}$.

^{*)} Oba způsoby vyjádření jsou ekvivalentní; viz vztahy (34).

9. Radiální napětí obecně rostou s tloušťkou jakékoliv z vrstev. Není nutno je uvažovat, platí-li pro relativní tloušťku libovolné z vrstev $h/b \leq 0,05$, nebo je-li splněno současně $h_1/b \leq 0,1$ a $h_2/b \leq 0,1$. V uvedených případech je dále osové napětí přibližně stejně velké jako obvodové napětí v téže vrstvě a konstantní napříč vrstvou, a lze je počítat podle vzoreců pro dvouvrstvé desky bez možnosti prohnutí (viz např. [1]).



Obr. 4. Napětí v povlaku na plném válci vyvolaná rozdíly teplotních roztažností – závislost na poměru tloušťky povlaku k poloměru styčné plochy a na poměru modulů pružnosti povlaku a základu. σ^* – redukované napětí; pro skutečné napětí platí $\sigma = \sigma^*(\alpha_1 - \alpha_2) (T_0 - T) E_1 / (1 - \mu)$. E – modul pružnosti, μ – Poissonovo číslo, h – tloušťka vrstvy, b – poloměr styčné plochy. Index 1, 2 označuje vnější, resp. vnitřní vrstvu; σ_{rB}^* – radiální napětí ve styčné ploše, σ_{t1A} ; σ_{t1B} – obvodové napětí na vnějším povrchu povlaku a v místě styčné plochy. Osové napětí σ_{a1} má velmi blízké hodnoty k obvodovému napětí σ_{t1A} , přičemž platí: při $E_1 > E_2$ je $\sigma_{a1} > \sigma_{t1A}$, při $E_1 < E_2$ je $\sigma_{a1} < \sigma_{t1A}$, při $E_1 = E_2$ je $\sigma_{a1} = \sigma_{t1A}$.

10. Pro relativní tloušťky $h_1/b > 0,1$ a $h_2/b > 0,1$ radiální napětí rychle stoupá a je nutno je uvažovat. Rovněž je třeba respektovat hyperbolické rozložení obvodových napětí a užívat k výpočtu přesnějších vztahů (19)–(30). Pro $h_1/b > 1$ se růst radiálních napětí zmírňuje a pro $h_1/b = 10$ již prakticky dosáhlo σ_{rB} své maximální možné hodnoty. Ta je tím větší, čím větší je tloušťka vnitřního válce, resp. vrstvy; prakticky se však tato tloušťka uplatňuje pouze pro $h_2/b < 0,8$.

11. S rostoucí tloušťkou určité vrstvy klesá obvodové i osové napětí v této vrstvě a ve druhé vrstvě naopak roste. Tento vývoj probíhá prakticky opět pouze pro $h_1/b \leq 10$, pokud (při tenčích vrstvách) nedosáhlo příslušné napětí své mezní hodnoty (tj. maximální nebo nulové) již dříve.

12. Maximálních hodnot nabývá osové i obvodové napětí v povrchové vrstvě při zanedbatelné tloušťce této vrstvy ve srovnání s tloušťkou základu, přičemž pro vrstvu na vnějším povrchu platí

$$\sigma_{t1 \max} = \sigma_{a1 \ max} = \sigma_{1 \ max}, \sigma_{rB} = 0, \quad (35)$$

kde $\sigma_{1 \ max}$ je dánou vztahem (32). Maximální hodnoty pro tenkou vrstvu na vnitřním povrchu dutého válce dostaneme záměnou indexů 1 a 2.

13. Maximální hodnota, které může dosáhnout radiální napětí σ_{rB} ve styčné ploše je podle (29) pro $a \gg b, c = 0$:

$$\sigma_{rB \max} = -\frac{1-\mu}{1+e(1+\mu-2\mu^2)/(1+\mu)} \sigma_{1 \max}, \quad (36)$$

přičemž zároveň podle (24), (25), (27) a (29) platí

$$\begin{aligned} \sigma_{t2B} &= -\sigma_{t1B} = \sigma_{rB \ max}, \\ \sigma_{a1} &= 0, \quad \sigma_{a2} = \sigma_{rB \ max}(1+e)/e. \end{aligned} \quad (37)$$

Pro střední hodnotu Poissonova čísla keramických materiálů a skel $\mu = 0,25$ je $\sigma_{rB \ max} = 0,75 \sigma_{1 \ max}/(1+0,9e)$. Na příklad pro $e = E_1/E_2 = 1$ může radiální napětí ve styčné ploše σ_{rB} dosáhnout až 40 % hodnoty $\sigma_{1 \ max}$ apod.

Koule

Průběh radiálních a obvodových napětí v jednotlivých vrstvách je dán obecně vztahy (7)–(9)*), přičemž pro radiální napětí platí okrajové podmínky

$$\sigma_{r1}(r=a) = 0, \quad (38)$$

$$\sigma_{r2}(r=c) = 0, \quad (39)$$

$$\sigma_{r1}(r=b) = \sigma_{r2}(r=b) = \sigma_{rB}. \quad (40)$$

Obě spojené vrstvy musí mít dále stejné zvětšení poloměru styčné plochy,

$$u_1(r=b) = u_2(r=b). \quad (41)$$

Čtyři podmínky (38)–(41) rozepsané s užitím vztahů (7)–(10) tvoří soustavu čtyř, resp. tří lineárních rovnic o třech neznámých: σ_{rB} , σ_{t1B} , σ_{t2B} . Po provedení řady úprav získáme následující vztah pro σ_{rB} :

$$\sigma_{rB} = -\frac{\frac{2(\alpha_1 - \alpha_2)(T_0 - T)}{\frac{1}{E_1} \cdot \frac{\varphi_1^3 + 2 + \mu_1(\varphi_1^3 - 4)}{\varphi_1^3 - 1} + \frac{1}{E_2} \cdot \frac{\varphi_2^3 + 2 + \mu_2(\varphi_2^3 - 4)}{1 - \varphi_2^3}}}{(42)}$$

přičemž jako dříve značí $\varphi_1 = a/b$, $\varphi_2 = c/b$. Dosadíme-li do (7)–(9) napětí σ_{rB} z (42) a položíme-li dále $\sigma_{rA} = 0$, $\sigma_{rC} = 0$, můžeme určit radiální a obvodové napětí v libovolném místě. Opět však postačí, budeme-li znát σ_{rB} a obvodová napětí σ_{t1A} , σ_{t1B} , σ_{t2B} , σ_{t2C} . Pro tato napětí platí

$$\sigma_{t1A} = -\frac{3}{2(\varphi_1^3 - 1)} \sigma_{rB}, \quad (43)$$

$$\sigma_{t1B} = -\frac{2 + \varphi_1^3}{2(\varphi_1^3 - 1)} \sigma_{rB}, \quad (44)$$

$$\sigma_{t2B} = \frac{2 + \varphi_2^3}{2(1 - \varphi_2^3)} \sigma_{rB}, \quad (45)$$

$$\sigma_{t2C} = \frac{3}{2(1 - \varphi_2^3)} \sigma_{rB}. \quad (46)$$

*) Platí $f'_r = f'_t = 0$.

POZNÁMKA. Je-li vnitřní koule plná, platí

$$\sigma_{t2}(r) = \sigma_{t2}(r) = \sigma_{rB} = \text{konst.} \quad (47)$$

Průběh radiálních i obvodových napětí ve dvouvrstvé kouli, vyvolaných rozdíly teplotních roztažností obou vrstev je obecně podobný jako průběh odpovídajících napětí ve dvouvrstvém válci a platí pro něj obr. 2a. Pro získání kvantitativní představy byla propočítána bezrozměrná napětí σ_{rB}^* , σ_{t1A}^* , σ_{t1B}^* , σ_{t2B}^* , σ_{t2C}^* (definovaná opět vztahem (31) pro různé kombinace tloušťky povrchové vrstvy, základu a poloměru styčné plochy, a to pro různé poměry modulů pružnosti E_1/E_2 a při $\mu_1 = \mu_2$.

Z výpočtů vyplynulo, že obecné zákonitosti (vliv tloušťky a křivosti jednotlivých vrstev, vliv modulů pružnosti atd.) jsou stejné jako u válce s povrchovou vrstvou; pouze číselné hodnoty se poněkud liší. U koule nepůsobí osové napětí, ale jenom napětí obvodová a radiální. Zakřivení ve dvou směrech má za následek, že při jinak stejných poměrech (φ , α , E , ...) budou radiální napětí v kouli o něco vyšší než ve válci, obvodová napětí budou naopak o něco menší. (Z těchto důvodů zde ani neuvádíme samostatný obrázek, s tím, že pro představu stačí obr. 3, 4.) Rovněž platí, že asi do poměru $h/b \leq 0,1$ lze vliv zakřivení i radiální napětí zanedbat a pro výpočet obvodových napětí užít stejných vztahů jako pro vrstvu na rovné desce bez možnosti prohnutí [1]. Pro velmi tenkou desku platí

$$\sigma_{t1\max} = \sigma_{1\max}, \quad \sigma_{rB} = 0, \quad (48)$$

kde $\sigma_{1\max}$ je dáno vztahem (32). Radiální napětí σ_{rB} ve styčné ploše dosahuje maximální hodnoty $\sigma_{rB\max}$ již pro $h_1/b \geq 5$. V extrémním případě, při $a \gg b$, $c = 0$, je

$$\sigma_{rB\max} = -\frac{1-\mu}{0,5 + e(1-2\mu)} \sigma_{1\max}, \quad (49)$$

přičemž platí

$$\sigma_{t2B} = -2\sigma_{t1B} = \sigma_{rB\max} \quad (50)$$

NAPĚTÍ ZPŮSOBENÁ NEHOMOGENNÍM ROZLOŽENÍM TEPLOT

Příkladem je stěna oddělující dvě prostředí o různých teplotách nebo povrchová vrstva na masivním tělese složitého tvaru, které je vystavováno změnám teploty.

Východiskem pro stanovení napětí je znalost rozložení teplot. Pokud je tloušťka stěny, resp. vrstvy malá ve srovnání s poloměrem křivosti střední plochy, je rozložení teplot i rozložení a velikost napětí podobné jako u rovné desky bez možnosti volného prohnutí a platí vše, co bylo řečeno v práci [1].

U stěn relativně tlustých (vzhledem k poloměru křivosti) se projeví odchylinky v rozložení teplot: při stacionárním prostupu tepla válcovou stěnou není rozložení teplot napříč stěnou lineární, ale logaritmické; u koule se mění s $1/r$ [16]. Tomu odpovídá i rozložení obvodových a osových napětí; navíc se objeví i napětí radiální. Poznamenejme, že vliv zakřivení je nutno při určování rozložení teplot respektovat přibližně pro $h/b > 0,5$; při určování napětí již pro $h/b > 0,1$ (podobně jako v předechozím oddílu).

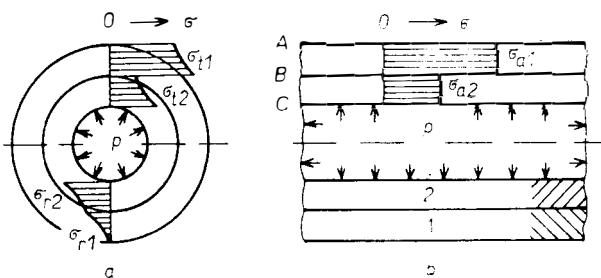
Při výpočtu teplotních napětí vycházíme ze vztahů (1), (2), (4)–(6) u válce a (7), (8), (10) u koule.* Postup řešení pro dutý homogenní válec se stacionárním

*) Konstanty K , M , C a funkce f_r , f_t , f_a (popř. K' , M' , f'_r , f'_a) se pro dané rozložení teplot určí z podmínek rovnováhy sil.

rozložením teplot je např. v [8], výsledné vztahy pro homogenní dutý válec a kouli jsou v [9]. Dvouvrstvé těleso řešíme s užitím principu superpozice v prvém kroku tak, jako kdyby se jednalo o dvě samostatná tělesa s příslušným rozložením teplot. K takto stanoveným napětím musíme přičíst napětí, která vzniknou, jestliže na styčnou plochu obou vrstev připojíme radiální napětí (a u válců navíc osové síly) takové velikosti, aby výsledná změna styčného poloměru (a délky u válců) byla pro obě vrstvy stejná.

NAPĚTÍ ZPŮSOBENÁ VNITŘNÍM NEBO VNĚJŠÍM PŘETLAKEM

Ochranné vrstvy se často užívají na válcových nebo kulových nádobách, popř. potrubích vystavených působení tlaku pracovního média na jeden nebo oba povrchy. U relativně tenkých vrstev je možno vliv zakřivení stěny na rozložení napětí zanedbat a určovat napětí podle teorie tenkostenných nádob s respektováním rozdílných elastických vlastností základu a povrchové vrstvy [1, 17]. Je-li však vrstva vzhledem k zakřivení povrchu relativně tlustá, je radiální napětí rozloženo napříč stěnou nelineárně. Rovněž obvodové napětí není konstantní, ale má hyperbolický průběh s maximální hodnotou vždy na vnitřním povrchu příslušné vrstvy (obr. 5).



Obr. 5. Rozložení napětí v dvouvrstvém válcu zatíženém vnitřním přetlakem (schematicky). Platí $E_1 > E_2$.

a) — příčný řez, b) — podélní řez. Obr. 5a platí i pro dvouvrstvou kouli.
 σ_r — radiální napětí, σ_t — obvodové napětí, σ_a — osové napětí, p — tlak, E — modul pružnosti.
Index 1, 2 označuje vnější, resp. vnitřní vrstvu.

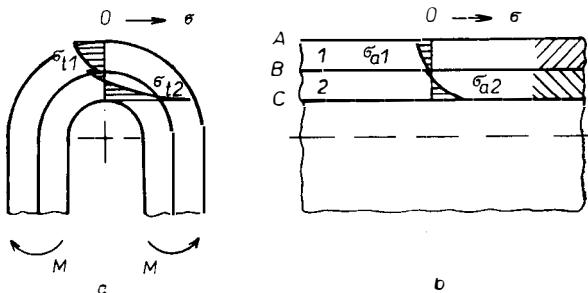
Pro rozložení napětí ve válcové vrstvě platí obecně vztahy (1)–(6), pro kulovou vrstvu platí (7)–(10). Velikost radiálních a obvodových napětí v dvouvrstvém tělesu dostaneme, přepíšeme-li tyto vztahy pro každou z vrstev, zatížíme dále vnitřní, popř. vnější povrch příslušným přetlakem, a připojíme-li navíc ve styčné ploše takové radiální napětí σ_{rB} , aby změna poloměru této plochy byla u obou vrstev stejná. U válcových těles je současně nutno respektovat působení osových sil, a to jednak od vnějšího, popř. vnitřního přetlaku v nádobě, jednak od snahy každé z vrstev deformovat se v axiálním směru jiným způsobem. Podrobný postup pro dvouvrstvý válec je uveden např. v [7, 8].

Z uvedené teorie vyplývá, že při zatížení dutého válce nebo koule radiálním tlakem se uplatňuje jednak samotná tloušťka stěny (s rostoucí tloušťkou napětí při daném tlaku obecně klesají), jednak se uplatňuje poměr tloušťky stěny a její křivosti, přičemž s rostoucím poměrem h/r_s roste nerovnoměrnost rozložení napětí napříč průřezu. Na příklad u homogenní válcové trouby o poměru $h/r_s = 0,2$ (kde r_s je

střední poloměr stěny) je skutečné napětí na vnitřním povrchu o 1 % vyšší, než by vyšlo podle teorie tenkostěnných nádob, při $h/r_s = 0,5$ je vyšší o 6 %, při $h/r_s = 1$ je vyšší o 25 % atd. Tato čísla nám zároveň poskytují představu o tom, kdy postačí zjednodušený výpočet a kdy je nutno užít přesnější teorii.

NAPĚTÍ ZPŮSOBENÁ OHYBEM

Chování rovných desek s povrchovou vrstvou při zatížení ohybem bylo analyzováno v práci [1], přičemž odvozené vztahy platí i pro stěny a skořepiny mírně zakřivené. Jestliže je ale tloušťka stěny, resp. povrchové vrstvy srovnatelná s poloměrem křivosti styčné plochy, potom ohybová napětí již nejsou rozložena napříč průřezu lineárně, ale hyperbolicky, s maximální hodnotou na vnitřním povrchu (obr. 6). To je způsobeno tím, že relativní prodloužení v místech bližších vnitřnímu povrchu (tj. o menším poloměru křivosti) je větší než v místech vzdálenějších.



Obr. 6. Rozložení napětí vyvolaných ohybem v silně zakřivené dvouvrstvé desce (schematicky). Platí $E_1 < E_2$.

a) — příčný řez, b) — podélný řez.

σ_t — obvodové napětí, σ_a — osové napětí (poměrně malé radiální napětí zde není zakresleno), E — modul pružnosti, M — ohybový moment. Index 1, 2 označuje vnější, resp. vnitřní vrstvu.

Zjednodušená teorie ohybu silně zakřivených desek (resp. prutů) je např. v [5]. Vyplývá z ní mimo jiné, že při $h/r_s = 0,2$ je skutečné napětí na vnitřním povrchu homogenní desky o 6 % větší, než by vyšlo výpočtem podle teorie ohybu rovných, resp. mírně zakřivených desek, při $h/r_s = 0,5$ je vyšší o 21 %, při $h/r_s = 1$ je vyšší o 53 % a s rostoucím poměrem h/r_s dále prudce narůstá [5, 10]. Podobně jako u silnostěnných nádob zatížených radiálním tlakem se tedy i zde uplatňuje nejen samotná tloušťka stěny (obecně ohybové napětí s rostoucí tloušťkou klesá), ale i poměr tloušťky vzhledem k poloměru křivosti, přičemž tento vliv může být u silně zakřivených vrstev výraznější než vliv pouhé tloušťky.

Při větších poměrech h/r_s se dále objevují radiální napětí (tahová, jestliže se ohybový moment snaží zmenšit křivost), která dosahují maxima poblíž středu tloušťky (celé) stěny a mohou se nebezpečně projevit i ve styčné ploše základního tělesa a povlaku. Na příklad u homogenní desky při $h/r_s = 0,67$ činí $\sigma_{r,\max} = 0,14 \sigma_{t,\max}$, kde $\sigma_{t,\max}$ je maximální obvodové napětí na vnitřním povrchu, při $h/r_s = 1$ je $\sigma_{r,\max} = 0,19 \sigma_{t,\max}$ atd. Při relativně velkých zakřiveních je proto třeba provádět výpočty podle přesnější teorie, která radiální napětí respektuje [6].

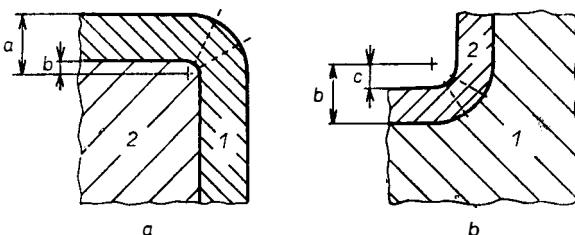
Výpočty napětí v ohnutých deskách s ochrannou povrchovou vrstvou jsou poměrně snadné při použití zjednodušené teorie ohybu silně zakřivených prutů [5, 10]. V tomto případě je možno užít vzorce odvozené pro homogenní těleso s tím, že při výpočtu průrezových charakteristik dosadíme u povrchové vrstvy redukovanou šířku,* kterou získáme tak, že původní šířku přenásobíme poměrem modulů pružnosti obou vrstev. Kromě toho je nutno dělením vypočítaných napětí členem $(1 - \mu^2)$ respektovat relativně velkou šířku desky, resp. vrstvy. Důsledkem velké šířky je i vznik napětí $\sigma_a = \mu \cdot \sigma_t$ ve směru osovém, resp. kolmém na napětí obvodová σ_t .

S ohledem na to, že maximální obvodové napětí působí na povrchu bližším středu křivosti, a že je tím větší, cím větší je poměr h/r_s , lze očekávat, že při jinak stejných podmínkách (poloměr styčné plochy, tloušťka vrstvy, moduly pružnosti atd.) budou k praskání náchylnejší vrstvy na vnitřních plochách než na vnějších. Nepříznivý vliv radiálních napětí se uplatní zejména v případech, kdy se ohybový moment snaží zmenšit křivost desky s povrchovou vrstvou.

POMĚRY NA HRANÁCH A V KOUTECH

Uvedenou teorii napjatosti vrstev na válci nebo kouli lze v prvém přibližení užít i pro posouzení chování vrstev na hranách a v rozích nebo v koutech. Je ovšem nutné přihlížet k následujícím odchylkám a omezením.

Podobné rozložení napětí jako u válce, popř. koule bude jenom ve střední části povlaků, ohrazené na obr. 7 čárkováně. S přiblížováním k rovným plochám se bude rozložení napětí blížit k rozložení odpovídajícímu tomuto případu. Kvantitativně



Obr. 7. Povlak na hrani (a) a v koutu (b). Příčný řez, schematicky, zvětšeno. Přerušovanými čarami je ohrazena oblast, ve které je rozložení napětí v povlaku podobné jako u válce zatíženého rotačně symetricky. Označení vrstev a poloměrů je stejné jako na obr. 1.

blízké hodnoty k hodnotám vypočteným podle vzorců uvedených v této práci lze navíc očekávat jen u ochranných povlaků, u kterých volný povrch a styčná plocha se základním tělesem tvoří části soustředních válců nebo koulí. Zatímco u vrstev na vypuklých plochách může být tato podmínka splněna dost snadno (obr. 7a), u konkávních ploch bude splněna jen při relativně velkém poloměru styčné plochy a tenkém povlaku (obr. 7b). V odlišných případech bude napjatost složitější, i když její charakter bude obecně podobný.

Protože základní těleso bývá v oblasti hrany zpravidla masívní vůči povrchové vrstvě, bude se účinkem jejího silového působení (např. při rozdílných teplotních roztažnostech) deformovat podstatně méně než pouhý válec o stejném poloměru jako

*) Tloušťky dosazujeme beze změny.

má hrana. Napětí potom budou spíše odpovídat případu, jako kdyby základní těleso mělo větší modul pružnosti než ve skutečnosti.

Bez ohledu na tyto odchylky platí, že u ostrých hran dosahují vnitřní napětí maximálních možných hodnot již při poměrně malých tloušťkách povlaku. Mají-li se tato napětí výrazněji snížit, měl by poloměr hran a rohů základního tělesa být značně větší než tloušťka povlaku.

Představu o maximálním napětí v tenkých povlacích v místech složitějších tvarových změn, jako jsou vruby, zárezy, změny tloušťky apod., můžeme někdy získat pomocí tzv. součinitelů koncentrace napětí [5, 8]. U tělesa z homogenního materiálu (bez povlaku, popř. při $E_1 = E_2$) stačí přenásobit jmenovité napětí tímto součinitelem, který pro daný tvar tělesa a způsob zatížení nalezneme v tabulkách nebo grafech, viz např. [5, 10]. Je-li na povrchu vrstva o jiném modulu pružnosti, je nutno vypočtené napětí na povrchu přenásobit ještě poměrem modulů pružnosti vrstvy a základního tělesa. Na příklad pro vrstvu označenou indexem 1 na základním tělese 2 se maximální napětí vypočítá podle vztahu

$$\sigma_{1\max} = \sigma_{2\text{ nom}} \cdot \alpha^* \cdot E_1/E_2, \quad (51)$$

kde α^* je součinitel koncentrace napětí a $\sigma_{2\text{ nom}}$ je jmenovité napětí v daném místě, stanovené pro součást podle vzorce uvedeného vždy u příslušného grafu nebo tabulky pro určení α^* .

SHRNUTÍ

Ochranné povlaky se vytvářejí nejen na plochách rovných, ale i na plochách zakřivených. Na rozložení a velikost napětí v tomto případě mají vliv nejen elasticke a tepelné vlastnosti a tloušťky povrchové vrstvy a základu, ale ve značné míře i jejich zakřivení.

V předložené práci byla vyšetřována napjatost ve dvouvrstvých válcích a koulích z lineárně elastickeho materiálu, jež představují základní případy. Byla uvažována napětí vznikající v důsledku rozdílných teplotních roztažností obou vrstev, dále při nerovnoměrném rozložení teplot, při zatížení radiálními tlaky a při působení ohybového momentu. Mezi nejdůležitější poznatky patří:

1. Při relativně tenkých povrchových vrstvách (vzhledem k tloušťce základu a k poloměru křivosti) působí v povrchové vrstvě obvodová a popř. osová napětí, která jsou zde rovnoměrně rozložená a mají prakticky stejnou velikost jako u dvouvrstvých desek bez možnosti prohnutí (jde-li o vnitřní pnutí vyvolaná rodily teplotních roztažností), popř. jako u dvouvrstvých tenkých skořepin, jsou-li napětí vyvolaná radiálními tlaky nebo ohybem. Radiální napětí jsou vzhledem k obvodovým napětím zanedbatelná, rovněž jsou zanedbatelná vnitřní pnutí v základním tělese. Všeobecně platí podobné zákonitosti jako u rovných desek s povrchovými vrstvami.

2. Je-li poměr tloušťky povrchové vrstvy a poloměru křivosti styčné plochy h/b větší než 0,1, objevují se radiální napětí. Obvodová napětí mají napříč vrstvou hyperbolický průběh s maximální hodnotou vždy na vnitřním povrchu vrstvy, přičemž tato hodnota je větší než u rovných nebo málo zakřivených desek a skořepin. K výpočtu je nutno užít přesnějších vztahů respektujících zakřivení.

3. Napětí způsobená rozdíly teplotních roztažností nezávisí na absolutních tloušťkách povrchové vrstvy a základu, ale pouze na jejich vzájemném poměru a na poměru k poloměru styčné plochy (resp. k jinému charakteristickému poloměru). S rostoucí tloušťkou povrchové vrstvy obvodové a osové napětí v této vrstvě klesá a v základním tělese naopak roste, radiální napětí v obou vrstvách roste. Tento vývoj

pokračuje zhruba do $h/b \leq 10$, kdy jednotlivá napětí dosahují prakticky svých mezních hodnot (maximálních nebo nuly), pokud jich nedosáhla již dříve, a dále se nemění.

4. Napětí vyvolaná vnitřním nebo vnějším radiálním tlakem nebo ohybovým momentem závisí jak na poměrech tlouštěk jednotlivých vrstev a poloměru křivosti, tak i na absolutních hodnotách tlouštěk, přičemž s rostoucími tlouštěkami obecně klesají.

5. Při současném působení vnitřních pnutí a vnějších zatížení lze výsledná napětí určit jako součet hodnot odpovídajících jednotlivým způsobům zatížení.

Další podrobnosti jsou uvedeny u jednotlivých případů. S ohledem na přijatá zjednodušení mají výpočty podle naznačených postupů a vzorců někdy pouze orientační hodnotu a obrázejí poměry ve vrstvách na zakřivených plochách spíše kvalitativně. Především to platí pro hrany a kouty. K přesnějšímu určení napětí ve složitějších případech jsou nutné dokonalejší, zejména numerické výpočetní metody.

Literatura

- [1] Menčák J.: *Silikáty* 32, 1 (1988).
- [2] Appen A. A.: *Těperaturoustojčivyyje neorganičeskije pokrytija*. Chimija, Leningrad 1967.
- [3] Appen A. A., Petzold A.: *Hitzebeständige Korrosions-, Wärme- und Verschleißschutzschichten*. VEB Deutscher Verlag für Grundstoffindustrie, Leipzig 1980.
- [4] Žuravlev G. I.: *Chimija i technologija termoštôjkich neorganičeskikh pokrytij*. Chimija, Leningrad 1975.
- [5] Höschl C.: *Pružnost a pevnost ve strojníctví*. SNTL, Praha 1971.
- [6] Timoshenko S. P., Goodier J. N.: *Theory of elasticity*. McGraw-Hill, New York 1970. (Ruský překlad: Teorija uprugosti. Nauka, Moskva 1975).
- [7] Kuba F.: *Teorie pružnosti a vybrané aplikace*. SNTL, Praha 1977.
- [8] Stržíš B. a kol.: *Pružnost a pevnost II*. (Skriptum). VŠST, Liberec 1980.
- [9] Kantorovič Z. B.: *Osnovy rasčeta chimičeskikh mašin i apparatov*. Mašgiz, Moskva 1952, 1960.
- [10] Roark R. J.; *Formulas for stress and strain*. McGraw-Hill, New York 1965.
- [11] Müller L.; *Glastechn. Ber.* 44, 133 (1971).
- [12] Sidorov A. B., Kuljamina L. L., Žorník A. I.; *Steklo*, [2], 53 (1966).
- [13] Weiss L.: *Mitt. Ver. deut. Emailfachl.* 10, 42 (1962).
- [14] Weyl V. D.; *Ber. Deut. Keram. Ges.* 36, 319 (1959).
- [15] Selsing J.: *J. Am. Ceram. Soc.* 44, 419 (1961).
- [16] Šorin S. N.: *Sdlení tepla*. SNTL, Praha 1968.
- [17] Menčák J.: *Výzkumná zpráva TZ 1068-87-331*. VÚPCHT, Hradec Králové 1987.
- [18] Peterson R. E.: *Stress concentration design factors*. John Wiley and Sons, New York 1959.

АНАЛИЗ НАПРЯЖЕНИЯ В ЗАЩИТНЫХ ПОКРЫТИЯХ НА ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ И ШАРОВЫХ ПОВЕРХНОСТЯХ

Ярослав Менчик

Научно-исследовательский институт пищевой и холодильной техники,
501 87 Градец Кралове

В работе приводятся основные отношения и способы расчета напряжения в цилиндрах и шарах, состоящих из двух прочно соединенных эластических слоев с различными свойствами. Далее следует подробное решение напряженности, вызванной различиями коэффициентов термического расширения при изменении температуры, и общий прием при неоднородном распределении температур, при нагрузке внутренней или внешней поверхности радиальным давлением и при нагрузке изгибающим моментом. Анализу подвергаются разные факторы. Кроме эластических или тепловых свойств действуют толщины поверхностного слоя и основания и их искривление. При относи-

тельно небольших толщинах покрытия h относительно толщины основания и радиуса кривизны поверхности соприкасания b условия подобны, как у ровных плит и тонкостенных оболочек с поверхностным слоем [1]. При условиях $h/b > 0,1$ кроме того появляются радиальные напряжения, распределение окружных напряжений по перек слоя приобретает гиперболический характер и поэтому нужно пользоваться более точными расчетными формулами. Напряжения, вызванные различиями коэффициентов термического расширения зависят только от отношения толщин обоих слоев к радиусу кривизны поверхности соприкасания. Напряжения, вызванные внешней нагрузкой зависят кроме того от абсолютной толщины покрытия и осиевого тела. В заключение работы рассматриваются возможности применения данной теории для покрытия на гранях и в углах.

Рис. 1. Двухслойные цилиндр и шар — общий вид; а — поперечное сечение цилиндром и шаром, б — продольное сечение цилиндром.

Рис. 2. Распределение напряжений в двухслойном цилиндре, вызванных различием температурных расширений внутреннего и внешнего слоев (схематически); а — поперечное сечение, б — продольное сечение. Рисунок 2а справедлив также для двухслойного шара: σ_r — радиальное напряжение, σ_t — окружное напряжение, σ_a — осевое напряжение. Индекс 1, 2 обозначает внешний или внутренний слой.

Рис. 3. Напряжения в двухслойном цилиндре, вызванные различиями температурных расширений — зависимость от отношения толщины внешнего и внутреннего слоя к радиусу поверхности соприкасания при $E_1 = E_2$, $\mu_1 = \mu_2$. σ^* — относительное напряжение; для действительного напряжения справедливо $\sigma = \sigma^*$. ($a_1 - a_2$) $(T_0 - T)E_1/(1 - \mu)$. E — модуль упругости, μ — коэффициент Пуассона, a — коэффициент линейного расширения, h — толщина слоя, b — радиус поверхности соприкасания. Индекс 1, 2 обозначает внешний или внутренний слой; а) — относительное радиальное напряжение σ_{rB} в соприкасающейся поверхности обоих слоев, б) — относительное окружное напряжение σ_t^* в слое 1 и 2. $h/b = 0,001$, ——— $h/b = 0,01$, —— $h/b = 0,1$, $h/b = 0,4$, $h/b = 1,0$. Буквы обозначают место, в котором действуют отдельные напряжения; А — внешняя поверхность слоя 1, В — поверхность соприкасания слоя 1 и 2, С — внутренняя поверхность слоя 2. При $h_2/b = 0,001$ и 0,01 напряжения σ_{11} и σ_{12} в целом слое практически постоянны, при $h_2/b = 1$ отвечает σ_{12} напряжение на внутренней поверхности полого цилиндра с отверстием „нулевого“ радиуса; для полного цилиндра справедливо $\sigma_{12C} = \sigma_{rB}$ (см. рис. 3а). При $E_1 = E_2$ действует $\sigma_{a1} = \sigma_{11A}$, $\sigma_{a2} = \sigma_{12C}$.

Рис. 4. Напряжения в покрытии на полном цилиндре, вызванные различиями температурных расширений — зависимость от отношения толщины покрытия к радиусу поверхности соприкасания и от отношения модулей упругости покрытия и основы; σ^* — относительное напряжение; для действительного напряжения справедливо $\sigma = \sigma^*(a_1 - a_2)(T_0 - T)E_1/(1 - \mu)$. E — модуль упругости, μ — коэффициент Пуассона, h — толщина слоя, b — радиус поверхности соприкасания. Индекс 1,2 обозначает внешнее или внутренне покрытие; σ_{rB} — радиальное напряжение в поверхности соприкасания, σ_{t1A} , σ_{t1B} — окружное напряжение на внешней поверхности покрытия и в месте поверхности соприкасания. Осевое напряжение σ_{a1} имеет близкие величины к окружному напряжению σ_{t1A} , причем действует: при $E_1 > E_2$ $\sigma_{a1} > \sigma_{t1A}$, при $E_1 < E_2$ $\sigma_{a1} < \sigma_{t1A}$, при $E_1 = E_2$ $\sigma_{a1} = \sigma_{t1A}$.

Рис. 5. Распределение напряжений в двухслойном цилиндре, нагруженном внутренним давлением (схематически). Справедливо $E_1 < E_2$; а) — поперечное сечение, б) — продольное сечение. Рис. 5а справедлив также для двухслойного шара; σ_r — радиальное напряжение, σ_t — окружное напряжение, σ_a — осевое напряжение, p — давление, E — модуль упругости. Индекс 1, 2 обозначает внешний или внутренний слой.

Рис. 6. Распределение напряжений, вызванных изгибом в сильно искривленной двухслойной плите (схематически). Справедливо $E_1 < E_2$; а) — поперечное сечение, б) — продольное сечение, σ_t — окружное напряжение, σ_a — осевое напряжение (относительно небольшое радиальное напряжение на рисунке не изображено), E — модуль упругости, M — момент изгиба. Через 1 и 2 обозначены внешний и внутренний слой.

Рис. 7. Покрытие на грани (а) и в углу (б). Поперечное сечение, схематически, увеличено. Через щтриховые линии ограничена область, в которой распределение напряжения в покрытии подобно как у цилиндра симметрично нагруженного. Обозначение слоев и радиусов согласно рис. 1.

ANALYSIS OF STRESSES IN PROTECTIVE COATINGS ON CYLINDRICAL AND SPHERICAL SURFACES

Jaroslav Menčík

Research Institute of Foodstuff and Refrigeration Technology, 501 87 Hradec Králové

An account is given of the basic relationships and stress calculation procedures for cylinders and spheres consisting of two firmly joined elastic layers with different properties. Then follows a detailed solution of the state of stress due to differences in thermal expansion during a change in temperature, and a general procedure to be employed in the case of inhomogeneous temperature distribution, in that of stressing the inner or outer surface by a radial load, and in that of loading by a bending moment. The effect of various factors is analyzed. Besides elastic and thermal properties, a significant part is played by the thickness of the surface layer and that of the substrate, and by the curvature. With relatively small coating thickness h compared with the substrate thickness and the radius b of the interface, the conditions are similar to those of plates and thin-walled shells with a surface layer [1]. At h/b ratios > 0.1 , there appear additional radial stresses, the distribution of hoop stresses acquires a hyperbolic course and more precise formulas must be employed. The stresses due to differences in thermal expansion depend only on the thickness ratio of the two layers to the curvature radius of the contact area. The stresses developed by external load also depend on the absolute thickness of the coating and the substrate. A discussion of the possible application of the suggested theory to coatings on edges and in corners is presented in the conclusion.

Fig. 1. Two-layer cylinder and sphere — general layout. а — transverse sectional view of the cylinder and the sphere, б — longitudinal sectional view of the cylinder.

Fig. 2. Stress distribution in a two-layer cylinder due to difference in thermal expansion coefficient of the inner and the outer layer (schematic diagram). а — transverse sectional view, б — longitudinal sectional view. Fig. 2 also applies to two-layer spheres.

σ_r — radial stress, σ_t — hoop stress, σ_a — axial stress. The 1,2 subscripts designate the outer and inner layer respectively.

Fig. 3. Stress in two-layer cylinder due to difference in thermal expansion — dependence on thickness ratio of the outer and inner layer to the interface radius at $E_1 = E_2$, $\mu_1 = \mu_2$.

σ^* — dimensionless stress; for actual stress it holds that $\sigma = \sigma^*(\alpha_1 - \alpha_2)(T_0 - T)E_1/(1 - \mu)$. E — modulus of elasticity, μ — Poisson's number α — coefficient of thermal expansion, h — layer thickness, b — radius of the interface. Subscripts 1, 2 designate the outer and inner layer respectively. а) — course of dimensionless radial stress σ_{rB} in the contact area of the two layers.

б) — course of dimensionless hoop stress σ_t^* in layer 1 and 2. — . — . — $h/b = 0.001$, — — — $h/b = 0.01$, — — — $h/b = 0.1$, $h/b = 0.4$, — . — . — $h/b = 1.0$

The letters indicate the points where the individual stresses act: А — outer surface of layer 1, В — interface between layers 1 and 2, С — inner surface of layer 2. At $h_2/b = 0.001$ and 0.01, the stresses σ_{t1} and σ_{t2} are practically constant throughout the layer, at $h_2/b = 1$, σ_{t2C} corresponds to the stress on the inner surface of a hollow cylinder with a cavity of 'zero' radius; for a full cylinder it holds that $\sigma_{t2C} = \sigma_{rB}$ (cf. Fig. 3a). At $E_1 = E_2$ it holds that $\sigma_{a1} = \sigma_{t1A}$, $\sigma_{a2} = \sigma_{t2C}$.

Fig. 4. Stress in a coating on a full cylinder due to differences in thermal expansion — dependence on the ratio of coating thickness to the interface radius and on the ratio of the elasticity moduli of the coating and the substrate. σ^* — dimensionless stress; for actual stress it holds that $\sigma = \sigma^*(\alpha_1 - \alpha_2)(T_0 - T)E_1/(1 - \mu)$. E — modulus of elasticity, μ — Poisson's number, h — layer thickness, b — radius of interface. Subscripts 1, 2 designate the outer and inner layer respectively.

σ_{rB} — radial stress in the contact area, σ_{t1A}^* , σ_{t1B}^* — hoop stress on the outer coating surface and at the contact area. Axial stress σ_{a1} has values very close to hoop stress σ_{t1A}^* , values very

close to hoop stress σ_{t1A} , while it holds that: at $E_1 > E_2$, $\sigma_{a1} > \sigma_{t1A}$, at $E_1 < E_2$, $\sigma_{a1} < \sigma_{t1A}$, at $E_1 = E_2$, $\sigma_{a1} = \sigma_{t1A}$.

Fig. 5. Stress distribution in a two-layer cylinder loaded by internal pressure (schematic diagram). It holds that $E_1 > E_2$.

a) — transverse sectional view, b) — longitudinal sectional view. Fig. 5a also holds for a two-layer sphere.

σ_r — radial stress, σ_t — hoop stress, σ_a — axial stress, p — pressure, E — modulus of elasticity. The 1, 2 subscripts designate the outer and inner layer respectively.

Fig. 6. Distribution of stress due to bending in a strongly curved two-layer plate (schematic diagram). It holds that $E_1 < E_2$.

a) — transverse sectional view, b) — longitudinal sectional view.

σ_t — hoop stress, σ_a — axial stress (the relatively small radial stress is not indicated in the Fig.), E — modulus of elasticity, M — bending moment. The 1, 2 subscripts designate the outer and inner layer respectively.

Fig. 7. Coating on an edge (a) and in a corner (b).

Schematic transverse sectional view, magnified. The dashed lines border the region where the stress distribution in the coating is similar to that in a cylinder loaded axially and symmetrically. The designation of layers and radii is the same as in Fig. 1.

INORGANIC SOLID FLUORIDES, CHEMISTRY AND PHYSICS (Anorganické pevné fluoridy. Chemie a fyzika). Redakce: Paul Hagenmüller. 628 str. vč. obr. Academic Press. INC., New York 1985, cena 112 dol.

V posledních 10 letech se začalo využívat pevných fluoridů jako konstrukčních materiálů v mnoha technických odvětvích. Příčinou jsou jejich výjimečné optické, elektrické, magnetické a chemické vlastnosti. Dnes je chemie fluoridů v popředí zájmu chemiků, kteří hledají nové způsoby přípravy, a také fyziků, kteří hledají nové technické využitelné vlastnosti fluoridů. Kniha je prvnou monografií o této tematice a obsahuje 21 kapitol, které napsali vynikající pracovníci z různorodých oborů. Jak je zřejmé z názvu kapitol, které dále uvádím, podává kniha znamenitý přehled o chemii, fyzikálně chemických vlastnostech a technickém využití fluoridů:

1. Úvod do problematiky, 2. Preparativní metody, 3. Krystalochemie fluoridů, 4. Krystalochemie oxifluoridů přechodových prvků, 5. Poruchy v pevných fluoridech, 6. Oxidační stavy v chemii fluoridů, 7. Fluoridová skla, 8. Fluorové interkalační sloučeniny grafitu, 9. Fero- a ferimagnetismus ve fluoridech, 10. Spinové interakce a poruchové efekty ve fluoridech, 11. Elektronová vodivost fluoridů, 12. Fluoridové ionty v iontových vodičích, 13. Nelineární vlastnosti fluoridů (piezo- a pyroelektrické, feroelektrické a feroelastické vlastnosti), 14. Optické vlastnosti fluoridů, 15. Fluoridy pro elektrochromní zařízení, 16. Nukleární magnetická rezonance fluoridů, 17. Mössbauerova spektroskopie fluoridových sloučenin, 18. Lokální a kooperativní efekty v elektronové paramagnetické rezonanční spektroskopii fluoridů přechodových kovů, 19. Fluoridová chemie a biomineralizace, 20. Fluoridová chemie a energie, 21. Průmyslové využití anorganických fluoridů.

Knihu přivítají nejen ti, kdo se oborem chemie fluoru zabývají, ale i ti, kdo se jím zabývají hodlájí. Oběma přináší dokonalý přehled současného stavu této vědní oblasti.

Satava

KYSLÍKOVÝ ANALYZÁTOR Land O₂ Analyzer firmy Land Combustion je určený na monitorovanie obsahu kyslíka v pevných spalinách. Zariadenie pozostáva z dvoch častí — zo sondy s detektorm, ktorá sa umiestňuje priamo do horúcich spalín, a z mikroprocesorovo riadenej vyhodnocovacej a zobrazovacej jednotky. Vylúčenie vzorkovania umožňuje priebežné monitorovanie obsahu O₂ v spalínach s teplotou do 700 °C. Sonda využíva prirodzenú konvekciu spalín, nevyžaduje preto dodatočné potrubia a čerpadiel. V prípade, že okolitá atmosféra nie je čistá, alebo obsahuje premenlivé množstvo kyslíka, možno použiť dodatočný prívod referenčnej atmosféry. Digitálna výstupná jednotka zobrazuje obsahy O₂ a teploty. Vstavaná automatická ochrana upozorňuje operátora na havarijné situácie, napr. na zlyhanie detektora, kolísanie teploty, zlyhanie analógových okruhov a abnormálne kalibračné hodnoty.

Glass Industry, apríl 1987 (Liška)