

LOMOVÁ HOUŽEVNATOST KERAMICKÝCH MATERIÁLŮ — NUMERICKÁ K-KALIBRACE OHYBOVÉHO VZORKU S ŠEVRONOVÝM ZÁŘEZEM

JAROSLAVA ZEMÁNKOVÁ, JAROSLAV JOCH*, JOSEF KAZDA

Ústav pro výzkum motorových vozidel, Lihovarská 12, 180 68 Praha 9

* Státní výzkumný ústav pro stavbu strojů, 250 97 Praha 9-Běchovice

Došlo 16. 7. 1987

Nevýhodou metody určování lomové houževnatosti, která užívá vzorek se ševronovým zářezem, je neznalost přesné K-kalibrační funkce faktoru intenzity napětí pro trhlinu vznikající v zářezu vzorku při namáhání ohybem. Tato funkce se dosud nahrazovala aproximacemi z přibližných analytických řešení. V článku je zpracováno trojrozměrné numerické řešení metodou konečných prvků, které ukazuje, že všeobecně užívaná přibližná řešení mohou dát zdanlivě vyšší hodnoty lomové houževnatosti křehkých materiálů. Odlišná délka trhliny, při níž dochází podle jednotlivých řešení k přechodu od stabilního k nestabilnímu šíření trhliny, poskytuje možnost experimentálního ověření správnosti výsledků numerického řešení.

PROBLEMATIKA URČOVÁNÍ LOMOVÉ HOUŽEVNATOSTI KERAMICKÝCH MATERIÁLŮ

Nové keramické materiály, označované také jako technologicky vyspělá keramika, jsou v posledních letech považovány za perspektivní konstrukční materiály především v souvislosti s vývojem nových generací spalovacích motorů a turbín.

Při projektování s těmito materiály je nezbytné plně respektovat zvláštnosti jejich mechanického chování, především křehkost. Do výpočtů a odhadů spolehlivosti, životnosti i únosnosti součástí nevstupují již jen parametry deformační tahové křivky, jako je tomu u kovů, ale především parametry lomově mechanické. Patří mezi ně v první řadě lomová houževnatost K_{Ic} . Tato veličina tedy neslouží pouze potřebám technologů jako ukazatel jakosti materiálů, ale je závažnou veličinou řídící životnost komponent, jejich časový průběh pevnosti apod. Velikost lomové houževnatosti hraje roli i při pseudonedestruktivním zjišťování kvality vyrobených součástí, tzv. přetěžovací zkoušce (proof-testu), pomocí níž lze u výrobků, které prošly touto zkouškou, garantovat jejich minimální životnost [1, 2]. Z toho všeho vyplývá pro konstruktéra naléhavá potřeba přesného určování této veličiny.

Jak již bylo řečeno, je keramika materiálem téměř ideálně křehkým, který až do porušení nevykazuje plastické deformace. Z tohoto hlediska vyhovuje všem předpokladům teorie lineární lomové mechaniky lépe než jiné konstrukční materiály a zdálo by se tedy, že pro exaktní určování K_{Ic} lze převzít metody a zkušenosti z oblasti zkušebnictví kovových či polymerních materiálů. Existují tři závažné důvody, proč je třeba u keramických materiálů při vývoji standardizované zkoušky pro určování K_{Ic} hledat vlastní cestu:

1. Obtíže spojené s výrobou iniciační trhliny ve vzorku;
2. nezbytnost zkoušek lomové houževnatosti za vysokých teplot, kdy není možné použít kovové prvky pro přenos vnějších sil, nýbrž jen keramické, které vysokým teplotám odolávají. Ty však zase nesnázejí tahové zatížení, je proto třeba takové uspořádání zátežného systému, aby byly keramické části pro přenos sil namáhaný

v tlaku. Z toho vyplývá ohybové zatěžování vlastního zkoušebního vzorku, zatímco u kovů a polymerů jde spíše o zkoušky při tahovém nominálním zatěžování [3, 4];

3. obtížná obrobitevnost keramických materiálů, jejíž nezbytnost vždy zvyšuje cenu zkoušky. To vede ke snaze vyhnout se tvarově složitým vzorkům s otvory a zářezy, sloužícími jako koncentrátorы napětí, které napomáhají vzniku a vedení ostré iniciační trhliny, jak je to časté u jiných materiálů [5].

Existence ostré reálné trhliny je nutná, nelze ji nahrazovat zářezy či vruby. To vyplývá z definice K_{Ic} jako kritické hodnoty součinitele intenzity napětí K_I trhliny při stavu rovinné deformace. Součinitel intenzity napětí je definičně spjat s polem napětí vykazujícím singularitu typu $r^{-1/2}$. Jinými slovy jen tam, kde jsou složky tenzoru napětí kolem kořene defektu popsány relací (např. při otvírání trhliny — I. módu) [7]

$$\sigma_{ij} \sim \frac{K_I}{r^{1/2}} \cdot f_{ij}^I(\Theta), \quad (1)$$

(r, Θ jsou polární souřadnice s počátkem v kořeni trhliny), může K plně charakterizovat amplitudu neboli součinitele intenzity tohoto pole napětí.

Je známo, že kolem zářezů a vrubů nevzniká pole s touto singularitou a složky napětí nejsou úměrné pouze K , ale i poloměru kořene vrubu ϱ (obr. 1). Tak např. pro hluboký okrajový vrub o poloměru kořene ϱ v poli nominálního tahového napětí je pro stabilitu rozhodující složka napětí σ_{yy} dáná [6]:

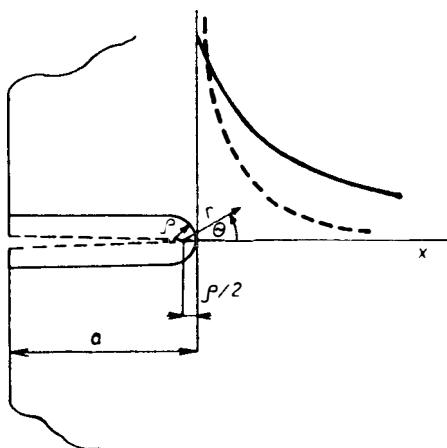
$$\sigma_{yy}(r, \Theta) = \frac{K_I \cdot \varrho}{\sqrt[4]{2\pi r^3/2}} \cdot \cos \Theta/2 + \frac{K_I}{\sqrt[4]{2\pi r}} \cdot \cos \Theta/2 \cdot (1 + \sin \Theta/2 \cos 3\Theta/2) \quad (2)$$

(zde je počátek posunut do vrubu o $\varrho/2$).

Faktor intenzity napětí ve vztahu (1) i (2) lze vyjádřit

$$K_I = \sigma \sqrt{\pi a} \cdot Y(a/w), \quad (3)$$

kde a je charakteristický rozměr trhliny či defektu, w rozměr tělesa v předpokládaném směru šíření porušení, Y korekční funkce, postihující přerozdělení silového toku v důsledku konkrétní geometrie tělesa a defektu.



Obr. 1. Rozdílný průběh rozhodující složky napětí v okolí kořene vrubu a trhliny. — — — σ_{yy} pro vrub; - - - σ_{yy} pro trhlinu.

Je patrné, že zatímco u trhliny je rozhodující složka napětí v blízkosti kořene úměrná pouze K_I , ($f_{ij}^I(\Theta = 0^\circ) = 1$), u vrubu se projeví i vliv tvaru. Odlišný charakter průběhu této složky napětí se rovněž podílí na tom, že na vzorcích se zárezy měříme při formálně stejném postupu jako s trhlinou obvykle vyšší hodnoty „lomové houževnatosti“ [8–10], které pak nelze považovat za materiálové charakteristiky. Je proto žádoucí vycházet z výsledků měření se skutečnými trhlinami.

Ty se však u keramických materiálů vyrábí velmi špatně v důsledku nízkého odporu materiálů proti jejich šíření. Pokusy o výrobu trhliny vtlačováním klínu do zárezu (jako u plastů) bývají málodky úspěšné, protože síly potřebné pro vznik trhliny jsou pouze nepatrne nižší než ty, které způsobují u těchto materiálů s nízkým odporem proti šíření úplný dolom. Snahy o vytvoření tlakových oblastí před zárezem k zastavení trhliny často vedou k jejímu vychýlení či větvení, což rovněž znehodnotí vzorek určený k měření K_{Ic} . V případě, že se zastavení podaří a trhlinu je přímá, jen těžko se určuje její délka, jelikož nelze na lomové ploše odlišit iniciační trhlinu od vlastní rychlé fáze lomu.

Výroba iniciační trhliny pomocí teplotního šoku vykazuje větší úspěšnost, avšak je nezbytné určit velikost vznikajících vnitřních prutí nebo je zvláštními postupy eliminovat.

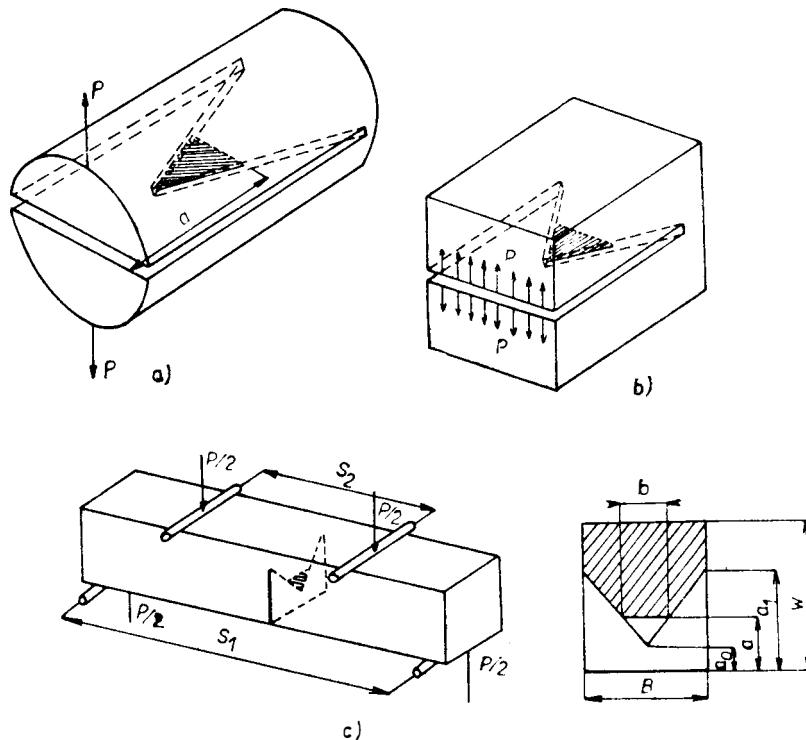
U kovů vzniká přirozená trhliny ze zárezu při cyklickém zatěžování, takže prostřednictvím jejího pomalého únavového růstu lze získat iniciační trhlinu potřebné délky. U keramiky je možné využít podobné metody při působení koroze pod napětím. Vzorek se zárezem je umístěn do korozního média a zatížen tak, aby vznikající pole napětí vytvářelo faktor intenzity napětí blízký K_{Ic} . Délku vznikající iniciační trhliny lze sledovat a řídit pomocí změn poddajnosti vzorku. Tato metoda je však zdlouhavá, koroze může změnit a ovlivnit výchozí vlastnosti materiálu a nelze ji použít pro všechny druhy nových keramických materiálů.

Snad nejrozšířenějším způsobem výroby iniciační trhliny se stala metoda vtisku pomocí Vickersova či Knoopova tvrdoměru nebo mikrotvrdoměru. Vznikající trhliny mívají polokruhový či poloeliptický tvar s rozdíly a profily určovanými silami v indentoru. Jde tedy o výchozí trhlinu s komplikovaným čelem, mnohdy o dvě či více trhlin v různých rovinách. Pole napjatosti na čele takového komplikovaného defektu je složité, přiřazení charakterizujícího součinitele intenzity napětí obtížné a fakticky vázané na jiné lomově mechanické fenomenologické modely. V praxi jde o vazbu ryze empirickou. Při vtisku navíc vznikají značná reziduální prutí, vedoucí ke zkreslení hodnot lomové houževnatosti. Jejich vliv je nezbytné buď vyloučit odstraněním povrchové vrstvy, vyžíháním, nebo započít odhadem jejich velikosti. Příslušné korekční vztahy vycházejí z analytických či numerických výpočtů velikosti a vlivu plastické zóny pod indentorem na hnací sílu vznikajících systémů trhlin [11–13]. V těchto odhadech je zahrnut závažný předpoklad, že plastická deformace probíhající pod vtlačovaným hrotom se děje při zachování deformovaného objemu, což vylučuje možnost aplikace závěrů na materiály, u nichž v této zóně probíhá např. martenzitická fázová transformace či výrazná densifikace. I v tomto bodě je obvykle nutné pro složitost problematiky a obtížný popis mikrostrukturních vlivů keramiky se uchylovat k empirickým relacím, dávajícím jen nepřesné výsledky, vhodné pro relativní porovnávání materiálů.

Další komplikace do zkoušek lomové houževnatosti může přinášet vlastní typ vzorku a způsob zatěžování (např. složitý profil čela trhliny ve vodicím zárezu u jinak výhodného zatěžování dvojitým krutem — DT testu) [5].

VZORKY S ŠEVRONOVÝM VRUBEM

Z výše uvedených důvodů vyvolal značnou pozornost návrh vzorku s ševronovým zárezem, který původně podal Barker [14] a který byl později různě modifikován, aby vyhovoval především keramickým materiálům [15—19]. Jeho základní podoby ilustruje obr. 2. Hlavní výhody tohoto vzorku odstraňují mnohé z výše uvedených problémů: Vzorek může být malý, výroba levná, jelikož nevyžaduje povrchové broušení a leštění; není zapotřebí uměle vyrábět výchozí trhlinu, neboť ta vzniká sama z vrcholu zázezu pomalým podkritickým růstem; není zapotřebí žádného měření délky trhliny, neboť K_{Ic} se určuje pouze z hodnoty maximální síly při zatěžování; ohybové zatěžování vzorku s ševronovým zárezem nabízí možnost měření za vysokých teplot.



Obr. 2. Různé modifikace vzorků s ševronovým zárezem; a) krátký prut; b) krátká tyč; c) pro čtyřbodový ohyb.

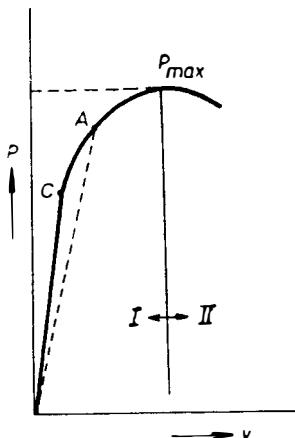
Theoretická analýza podmínek nestability vzniknuvší trhliny vychází z energetické bilance zatěžovaného vzorku s trhlinou. Nechť geometrie, uložení a zatížení vzorku s ševronovým vrubem při čtyřbodovém ohybu jsou dány obrázkem 2c. Zavádíme bezrozměrný popis tvaru zázezu a délky trhliny:

$$\alpha_0 = \frac{a_0}{w}, \quad \alpha_1 = \frac{a_1}{w}, \quad \alpha = \frac{a}{w}. \quad (4)$$

Délka čela trhliny b je

$$b = B \frac{a - a_0}{a_1 - a_0} = B \frac{\alpha - \alpha_0}{\alpha_1 - \alpha_0}. \quad (5)$$

Při zatěžování vzorku lineárně narůstá síla a průhyb až do okamžiku, kdy se ve vrcholu vrubu iniciuje trhлина. Na křivce zatížení—průhyb (obr. 3) se v tomto okamžiku objeví odklon od linearity v důsledku změny tuhosti (poddajnosti) vzorku. Při odlehčení vzorku v bodě A se síla vrací lineárně k nule a vzniklá plocha v zátěžném diagramu představuje práci vnějších sil investovanou do nevratných změn ve vzorku.



Obr. 3. Schematický průběh závislosti síly P na průhybu y ohýbaného vzorku s ševronovým zárezem. C... iniciace trhliny; I – oblast stabilního růstu trhliny, II – oblast nestabilního růstu trhliny.

Další nárůst trhliny o da vyžaduje postupné zvyšování síly pro tento pomalý podkritický růst až do okamžiku, kdy se trhлина rozběhne spontánně sama bez dalšího růstu síly a dolomí vzorek.

Hnací síla trhliny G_I představuje energii, kterou mechanická soustava těleso—vnější síly uvolní, když se plocha trhliny zvětší o jednotku plochy:

$$G_I = - \frac{dL}{da} \cdot \frac{1}{b}. \quad (6)$$

Zde L je potenciální energie deformovaného systému s trhlinou. V našem případě k L přispívá především energie deformační U a práce vnějších sil W :

$$L = U - W. \quad (7)$$

Z elastické teorie ohýbaného nosníku lze energii deformační vyjádřit pomocí poddajnosti vzorku C , což je průhyb vztažený na jednotkovou sílu:

$$C = y/P, \quad U = (1/2C) \cdot y^2 = 1/2 \cdot P^2 \cdot C. \quad (8)$$

Potom

$$dU/d\alpha = 1/2 \cdot P^2 \cdot dC/d\alpha, \quad (9)$$

za předpokladu, že při inkrementálním nárůstu trhliny zůstává síla konstantní. Ze zátežného diagramu lze diferenciál práce vnějších sil vyjádřit

$$dW = P \cdot dy = P^2 \cdot dC. \quad (10)$$

Úprava a dosazení vztahů (10), (9) do (7) a konečně (6) vede k vyjádření hnací síly trhliny pro náš případ:

$$G_I = \frac{P^2}{2b} \cdot \frac{dC}{da}. \quad (11)$$

Jelikož trhlina je v postupném pohybu, je zřejmé, že při každém „pop-in“ (přírůstku) musí hnací síla alespoň vyvážit odpor proti jejímu růstu, který materiál klade.

Ten je určován kritickou hodnotou hnací síly trhliny G_{Ic} , jež je materiálovou charakteristikou:

$$G_I = G_{Ic} \quad \text{neboli} \quad (P^2/2b) \frac{dC}{da} = G_{Ic}. \quad (12)$$

Z teorie lineární lomové mechaniky je známa vazba mezi G_{Ic} a K_{Ic} :

$$G_{Ic} = K_{Ic}^2/E', \quad (13)$$

kde $E' = E$ pro rovinnou napjatost,
 $= E/(1 - \nu^2)$ pro rovinnou deformaci.

Zde E , ν jsou Youngův modul pružnosti v tahu a Poissonovo číslo. Zdůrazňujeme, že vztah (12) předpokládá nezávislost G_{Ic} (K_{Ic}) na délce trhliny, tedy plochou R — křivku materiálu.

Spojením vztahů (12) a (13) lze získat vztah pro kritický součinitel intenzity napětí:

$$K_{Ic} = \left[E' \frac{P^2}{2b} \frac{dC}{da} \right]^{1/2}. \quad (14)$$

Vyloučením b a zavedením bezrozměrných délek pomocí relací (4) a (5) je možné poslední vztah přepsat:

$$K_{Ic} = P \left[\frac{E'}{2Bw} \cdot \frac{\alpha_1 - \alpha_0}{\alpha - \alpha_0} \cdot \frac{dC}{d\alpha} \right]^{1/2}. \quad (15)$$

Při rozměrově vhodnější úpravě

$$K_{Ic} = \frac{P}{B\sqrt{w}} \left[\frac{E'B}{2} \cdot \frac{\alpha_1 - \alpha_0}{\alpha - \alpha_0} \cdot \frac{dC}{d\alpha} \right]^{1/2} = \frac{P}{B\sqrt{w}} \cdot Y^* \quad (16)$$

lze na funkci Y^* nahlížet jako na K -kalibrační funkci faktoru intenzity napětí:

$$Y^* = \left[\frac{1}{2} E'B \cdot \frac{dC}{d\alpha} \cdot \frac{\alpha_1 - \alpha_0}{\alpha - \alpha_0} \right]^{1/2}. \quad (17)$$

Je ji možné určovat výpočetně z úplné analýzy stavu napětí na čele trhliny (numericky, experimentálně), nebo z měření změn poddajnosti při pomalém šíření trhliny (experimentálně). Rozvoj trhliny v ševronovém zárezu vede k tomu, že po určité fázi šíření je rychlosť dodávání energie do kořene trhliny nižší nežli rychlosť spotřeby energie, proto se musí síla zvyšovat. Od určitého okamžiku, charakterizovaného maximální silou P_{max} na zátežné křivce je tomu naopak a trhlina přechází

do nestabilního šíření (v každém okamžiku je $G_I > G_{Ic}$). Tento okamžik je podle Irwinovy teorie R-křivky [7] definován jako hledaná materiálová lomová houževnatost. Vidíme tedy, že při ohybové zkoušce na vzorku s ševronovým zárezem je možné při znalosti P_{\max} na zátežné křivce a změny tuhosti vzorku s délkou trhliny určit hodnotu K_{Ic} dle vztahu (16), dosadíme-li za $P \rightarrow P_{\max}$.

Úlohou zůstává určit průběh funkce Y^* v závislosti na délce trhliny. Bylo ukázáno [14], že tato funkce je závislá prakticky pouze na geometrii vzorku a vrubu, tudíž při dané konfiguraci stejná pro všechny materiály.

Neexistuje bohužel analytické řešení faktoru intenzity napětí pro diskutovanou konfiguraci trhliny v ševronovém zárezu. V literatuře se objevily dva základní přístupy k získání approximativního řešení. V prvním [15] (tzv. STCA model) se předpokládalo, že poddajnost vzorku s trhlinou v zárezu bude přibližně stejná jako u vzorku plného obdélníkového průřezu s přímou trhlinou stejné délky procházející celou tloušťkou vzorku. Bluhm [16] pak navrhl další přiblížení, v kterém rozdělil ohybový vzorek na řadu podélných řezů s průchozími trhlinami modelujícími zárez s trhlinou dané délky a pak spočetl poddajnost celého vzoru jako součet poddajností jednotlivých plátků. Vliv mezilaminárního smykového napětí byl odhadován na základě experimentálně měřených poddajností (tzv. Bluhmův model). Oba modely vykazovaly podobný průběh funkce $Y^*(\alpha)$ s výrazným minimem Y_{\min}^* , odpovídajícím maximální sile na křivce zatížení — průhyb. Poloha minima se však u obou modelů neshodovala. Proběhlo kritické hodnocení obou přístupů [17, 18, 19], jejich vzájemné porovnávání a experimentální ověřování [21]. Závěry ukázaly, že především Bluhmův model je zatížen v důsledku nespolehlivého odhadu korekčního faktoru na smyková napětí značnou chybou [20].

Snaha o získání přesnejší K -kalibrace ohybového vzorku s ševronovým vrubem vedla k pokusům o numerická řešení [22], především s užitím metody konečných prvků (MKP).

Naše řešení stejné problematiky, dále popsané, využívá rovněž možnosti numerického řešení pomocí MKP. Vychází z výše uvedeného, že totiž v okamžiku nestabilního rozběhu trhliny musí platit:

$$K_{Ic} = P_{\max} \frac{Y_{\min}^*}{\sqrt{Bw}}. \quad (18)$$

Kalibrační funkci Y_{\min}^* lze vyjádřit z průběhu funkce změn poddajnosti s délkou defektu α jako minimum Y_{\min} dle vztahu (17). Zároveň je možné ji určit jako

$$Y_{\min}^* = \min Y^*, \quad (19a)$$

kde

$$Y^* = \frac{K_I \cdot B \cdot \sqrt{w}}{P}, \quad (19b)$$

tedy na základě výpočtu faktoru intenzity napětí.

NUMERICKÁ ANALÝZA NA BÁZI TROJDIMENZIONÁLNÍ METODY KONEČNÝCH PRVKŮ

Cílem numerické analýzy byl:

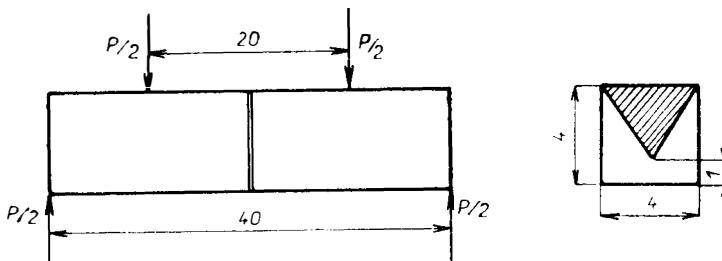
- a) výpočet průběhu faktorů intenzity napětí podél předpokládané písmé části trhliny;
- b) výpočet poddajností pro různé délky trhliny.

Poté následovala kalibrace funkce Y_{\min}^* podle vztahů (17) a (19). Konkrétní rozměry analyzovaného ohybového vzorku jsou na obr. 4. Pro výpočet byl použit programový soubor PMD [24] pracující na bázi MPK a soubor GENEL [25] pro generování geometrie a topologie sítě.

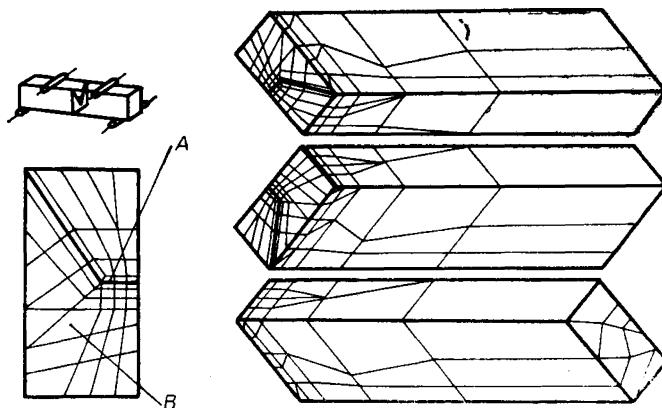
Z důvodů symetrie byla diskretizována pouze jedna čtvrtina tělesa, přičemž byly použity izoparametrické pětistěny a šestistěny s možností volby lineární a kvadratické násady podél každé hrany (obr. 5). Pro hrany ve směru podélné osy tělesa byla volena kvadratická násada, pro ostatní hrany byla volena lineární násada s výjimkou přibližně dvou vrstev prvků podél čela trhliny. Tato volba byla ověřována na dvojdimenzionální síti, která byla vytvořena jako střední řez trojdimentzionalní sítě. Pro simulování singularity typu $r^{-1/2}$ v napětí byly použity prvky se středovým uzlem posunutým do $1/4$ hrany. Výpočet byl proveden pro sedm délek trhliny, přičemž jednotlivé sítě zachovávaly stejnou topologii pro různé geometrie.

Faktor intenzity napětí K_I byl počítán ze složky u vektorů posuvů na lících trhliny v přiblížení rovinné deformace pomocí lineární extrapolace:

$$K_I = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{u \cdot E}{2(1 - \nu^2)} \left(\frac{\pi}{2r} \right)^{1/2}. \quad (20)$$



Obr. 4. Zvolená geometrie zářezu a rozměry vzorku pro numerický výpočet metodou konečných prvků.
 $\alpha_0 = 0,25; \alpha_1 = 1.$



Obr. 5. Diskretizace pro metodu konečných prvků při relativní délce trhliny $a/w = 0,5$. Počet prvků: 169, počet uzlů: 609. A — čelo trhliny; B — plocha zářezu.

Aby bylo možné podchytit průběh K_I podél lomové fronty, byl výpočet proveden vždy ve čtyřech ekvidistantních řezech kolmých na přímou část čela trhliny. Ze čtyř získaných hodnot faktoru intenzity napětí pro každou délku trhliny byl pak počítán integrální průměr

$$K_I = \frac{1}{b} \int_0^b K_I^* \cdot dl, \quad (21)$$

který nazýváme integrální faktor intenzity napětí. V posledním vztahu je K_I^* lineární lomená funkce nabývající v příslušných čtyřech bodech přímé části čela trhliny hodnoty K_I . Podle vztahu (19) byla pak spočtena funkce Y^* , která je tabulována v tab. I. Pro jednu délku trhliny byl při tomto kroku proveden výpočet pro různé hodnoty Poissonova čísla ν , aby se zjistila míra závislosti funkce Y^* na tomto materiálovém parametru.

Tabulka I

Hodnoty Y^* v ekvidistantních bodech přímé části čela trhliny 1 2 3 4 a jejich integrální průměr pro různé relativní délky trhliny. Vliv Poissonova čísla ν je ukázán pro jednu délku trhliny.

		Y^* v bodech				
α	ν	1	2	3	4	\bar{Y}^*
0,3125	0,23	22,82	23,03	23,68	25,09	23,56
0,375	0,13	20,93	21,19	22,15	24,39	22,00
0,375	0,23	20,91	21,19	22,14	24,46	22,00
0,375	0,30	22,61	22,91	23,93	26,35	23,77
0,4375	0,23	21,29	21,43	22,42	25,37	22,99
0,5	0,23	22,19	22,63	23,83	27,73	23,81
0,5625	0,23	24,76	25,14	26,30	30,82	26,41
0,625	0,23	29,20	29,31	30,36	35,23	30,63
0,75	0,23	47,47	47,44	48,52	55,11	49,08

Výpočet funkce Y^* z poddajnosti probíhal následovně: Poddajnosti získané z posuvů pro všechn sedm délek trhliny byly pro každé sousední tři hodnoty proloženy polynomem druhého stupně jako funkce délky trhliny. Z tohoto polynomu bylo pak počítáno dC/da a aplikován vztah (17). Výsledky jsou uvedeny v tab. II.

Tabulka II

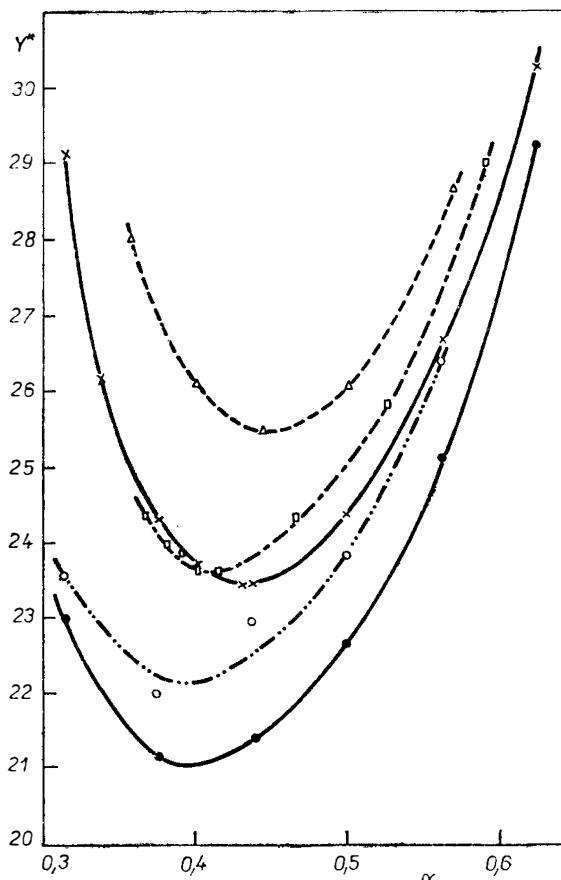
Hodnoty Y^* z poddajnosti pro různé relativní délky trhliny α

α	0,3656	0,3781	0,3906	0,4031	0,4156	0,4656	0,528	0,59
Y^*	24,31	24,05	23,83	23,6	23,65	24,35	25,55	29,05

DISKUSE VÝSLEDKŮ A POROVNÁNÍ S MODELY BLUHMOVÝM A STCA

Na obr. 6 je vynesen průběh funkce Y^* v závislosti na poměrné délce trhliny nejen podle výsledků obou přístupů našeho numerického řešení, ale pro srovnání i podle obou základních přibližných analytických řešení, tj. modelu STCA a Bluhmova [15], [18], [19]. Z výsledků řešení MKP je na základě výpočtu faktoru intenzity napětí (rov. (19b)) vynesena jednak funkce Y^* příslušná hodnotě K_I v bodě 2 na přímé části čela trhliny (body značené ●), jednak odpovídající integrálnímu faktoru intenzity napětí (body značené ○). Funkce Y^* získaná na základě numerického výpočtu změn poddajnosti rov. (17) je proložena body značenými □.

I numerické řešení je nutné chápát jako řešení zatížené určitými nepřesnostmi a chybami, plynoucími už z faktu diskretizace kontinua a způsobu výpočtu. Nemusí se však přijímat zjednodušující předpoklady už při modelování geometrie trhliny



Obr. 6. Závislost funkce Y^* na relativní délce trhliny podle výsledků prezentovaného numerického řešení a přibližných analytických modelů: $\cdots\triangle\cdots\triangle$ Bluhmovo řešení;
 $\cdots\times\cdots\times$ STCA model; $\cdots\square\cdots\square$ z numerické poddajnosti;
 $\cdots\circ\cdots\circ$, $\cdots\bullet\cdots\bullet$ z numerických hodnot K_I .

jako u obou zmíněných analytických řešení a už vůbec „upravovat“ řešení napjatosti.

Dá se očekávat, že STCA model je přesnější než Bluhmův, neboť v něm se od reality liší jen délka přímého čela trhliny a existence jejich šikmých čel, neboť tento model určuje Y^* z derivací poddajnosti vzorků s průchozí trhlinou stejné délky jako v ševnovém zářezu. Rozdíl v realitě modelu z hlediska funkce Y^* je jistě tím větší, čím menší bude α , tedy při kratších délkách trhliny, neboť pak lze očekávat velký rozdíl v délkách přímých částí čel trhlin v modelu a skutečnosti. To se potvrzuje i na základě našeho výpočtu (obr. 6). Rozdílnost bude přirozeně silně závislá i na hodnotách α_0 a α , vzorku [18]. Jak bylo již výše uvedeno, Bluhmovo přiblížení dává ještě horší odhad reality nežli model STCA, což potvrzuje i srovnání s výsledky našeho numerického řešení.

Zastavme se u otázky věrohodnosti uváděného numerického řešení. Při testování přesnosti výpočtu faktoru intenzity napětí z posuvu vykazovaly numerické pokusy s dvojdimentionální sítí, jež vznikla středním svislým řezem trojdimentionální sítě, chybu do 1% ve srovnání s řešením běžně dostupným v literatuře. Další chybu vnáší skutečnost, že K_I není podél přímé části čela trhliny konstantní. V oblasti přechodu od přímé části čela k šikmé části zářezu není diskretizace dostatečná, jisté pochybnosti lze mít i o správnosti předpokladu, že i zde se zachovává singularity $r^{-1/2}$. I za těchto okolností bylo potřebné pro danou délku trhliny určit jednu hodnotu K_I . Je-li jí zvolený integrální faktor intenzity napětí či jiná hodnota není snadné zodpovědět a ptát se musíme jen přírody, tedy prostřednictvím experimentu. Faktem zůstává, že u reálných materiálů publikované výsledky potvrzují zakřivování čel trhlin při jejich rozvoji [21].

Co se týká předpokladu rovinné deformace podél předpokládaného přímého čela lomu, domníváme se, že vzhledem k vlastnostem keramických materiálů, především jejich neschopnosti plastické deformace, odpovídá skutečnosti mnohem více než stav rovinné deformace, bez zvláštních požadavků na rozměry vzorku. I tak při $\nu = 0,23$ nemůže být chyba z tohoto zdroje větší než 4%.

Výpočet Y^* pomocí změn poddajnosti spočtených MKP považujeme pro malý počet určovaných poddajností za méně věrohodný a bereme jej jako doplňující orientační řešení.

Na základě obr. 6 je možné srovnat hodnoty Y_{\min}^* pro nás ohybový vzorek zvolených rozměrů podle různých přístupů. Jak tato hodnota, tak α_{\min} , odpovídající Y_{\min}^* , jsou rozhodující pro určování K_{Ic} a měly by být verifikovány experimentem. Pro vzorek zvolených rozměrů ($40 \times 4 \times 4$ mm) a geometrie zářezu byly stanoveny [19] a odhadnutý následující hodnoty Y_{\min}^* a α_{\min} :

Tabuľka III

Model:	STCA	Bluhmův	MKP- K_I v bodě 2	MKP- $I\bar{K}$	MKP- z poddajnosti
Y_{\min}^*	23,42	25,45	21,1	22,2	23,6
rozdíl od STCA (%)	0	+8,7	-9,9	-5,2	+0,77
α_{\min}	0,427	0,445	0,395	0,395	0,41

Tyto výsledky znamenají, že hodnoty K_{Ic} určené na základě numerického řešení faktoru intenzity napětí by byly nejnižší a trhlina by rostla stabilně k nejkratší délce ve srovnání s ostatními přístupy.

Poslední konstatování pak současně nabízí možnost experimentálního testování správnosti předpokládaných řešení, pakliže bude možné na lomové ploše rozlišit fázi pomalého a rychlého šíření.

Za povšimnutí stojí vliv hodnoty Poissonova čísla pro danou geometrii a zatežování, vykazovaný numerickým výpočtem. Z tabulky I plyne, že pro poměrnou délku trhliny $\alpha = 0,375$ ovlivňuje hodnota ν výsledek řešení až v rozmezí $\nu \in \langle 0,23 - 0,3 \rangle$, kde je rozdíl v Y^* asi 7,8 %. To je mnohem více než činil vliv Poissonova čísla při užití krátkého prutu [14], kde se odhadovala chyba při zanedbání vlivu materiálových parametrů na výsledky měření K_{Ic} asi 0,7 %. Podrobnejší objasnění této otázky by vyžadovalo hlubší analýzu. Zdá se však, že při užití keramických materiálů s typicky nízkými Poissonovými čísly lze skutečně prakticky vycházení z předpokladu, že kritická hodnota faktoru intenzity napětí je pouze funkcí geometrie a rozměrů vzorku se zárezem a na druhu materiálu nezávisí.

Literatura

- [1] Paluszny A. Wu. W.: *Journ. of Eng. for Power*, **617** (10) (1977).
- [2] Ritter J. E. Jr., at al.: *Jour. Mater. Science*, **15**, 2275 (1980).
- [3] ČSN 42 0347: *Zkouška lomové houževnatosti kovů při rovinné deformaci*.
- [4] ČSN 64 0623: *Zkouška lomové houževnatosti plastů při rovinné deformaci*.
- [5] Shih T. T., Opoku J.: *Engn. Fract. Mech.*, **12**, 479 (1979).
- [6] Creager M., Paris P. C.: *Intern. Jour. Fract. Mech.*, **3**, 247 (1967).
- [7] Zemáneková J.: *Úvod do lomové mechaniky*. Skripta FJFI, ČVUT, Praha 1981.
- [8] Myers R. J., Hillberry B. M.: *Fracture 1977*, ICF 4, Waterloo, 1977, s. 1001.
- [9] Munz D.: *Effect of Specimen Type on the Meas. Values of Fract. Tough. of Brittle Ceramics. Fract. Mechanics of Ceramics*, Vol. 6, str. 1. Plenum Press 1983.
- [10] Paterson A. W., Stevens R.: *Intern. Jour. High Techn. Ceram.*, **2**, 221 (1986).
- [11] Chantikul P., Anstis G. R., Lawn B. R., Marshall D. B.: *Jour. Amer. Ceram. Soc.*, **64**, 533, 539, (1981).
- [12] Keer L. M., Farris T. N., Jung-Chuang Lee: *Jour. Amer. Ceram. Soc.*, **69**, 392, (1986).
- [13] Evans A. G.: *Mater. Scie. and Engineering*, **71**, 3, (1985).
- [14] Barker L. M.: *Engn. Fract. Mech.*, **9**, 361 (1977).
- [15] Munz D. G., Shannon J. L., Bubsey R. T.: *Intern. Journ. of Fracture*, **16**, 317 (1980).
- [16] Bluhm J. I.: *Engn. Fract. Mech.*, **7**, 593 (1975).
- [17] Bluhm J. I.: In: *Advances in Research on the Strength and Fracture of Materials*, s. 409, Pergamon Press, New York 1978.
- [18] Munz D., Bubsey R. F., Shannon J. L.: *Jour. Amer. Ceram. Soc.*, **63**, 300 (1980).
- [19] Bubsey R. F., Shannon J. L., Munz D.: In: *Ceramics for High Performance Applications III*, s. 753, Plenum Press, New York 1983.
- [20] Mototsugu Sakai, Kouzou Yamasahi: *Jour. Amer. Ceram. Soc.*, **66**, 371, 376 (1983).
- [21] Nicoletto G.: *Engn. Fract. Mechanics*, **24**, 879 (1986).
- [22] Newman J. C. Jr. at al.: In: *Chevron-Notched Specimen: Testing and Stress Analysis*, ASTM STP 855. s.: 5, 32, 49. Ec.: Underwood, Freiman, Barrata, 1984.
- [23] Sheppard L. M.: *Metal Progress*, **10**, 54 (1986).
- [24] Pták S. a kol.: Programová dokumentace systému programů ... Technický záznam SVÚSS-86-02315, 1986.
- [25] Kazda J.: *Základní charakteristiky systému programů GENEL. Sborník referátů konf. Matematické metody v technických vědách*. Karlovy Vary 1986.

ХРУПКОСТЬ РАЗРУШЕНИЯ КЕРАМИЧЕСКИХ МАТЕРИАЛОВ — НУМЕРИЧЕСКАЯ К-КАЛИБРАЦИЯ ОБРАЗЦА НА ИЗГИБ С ШЕВРОНОВЫМ НАДРЕЗОМ

Ярослава Земанкова, Ярослав Йох*, Йозеф Казда

Научно исследовательский автомобильный институт, Лиговарска 12
180 68 Прага 9

*Государственный научно-исследовательский институт для стройки машин
250 97 Прага 9 — Беховице

Хрупкость разрушения керамических материалов K_{Ic} , применяемых в конструкции машин, играет весьма важную роль и ее величина тесно связана со сроком службы и надежностью керамических компонентов. Поэтому важен способ ее точного определения. Метод, основывающийся на применении образца с шевроновым надрезом исключает ряд неточностей определения K_{Ic} . Недостатком является незнание точной К-калибрационной функции фактора интенсивности напряжения для образующейся трещины в надрезе изгибающегося образца. Вместо данной функции до сих пор применяются аппроксимации, полученные на основании приближенных аналитических решений. В предлагаемой статье разработано трехмерное численное решение с помощью метода конечных элементов, которое показывает, что общепринимаемые приближенные решения могут давать мнимо более высокие величины хрупкости разрушения материалов. Различная длина трещины, при которой согласно отдельным решениям происходит переход от стабильного к нестабильному распространению трещины, предоставляет возможность экспериментальной проверки правильности результатов численного решения.

Рис. 1. Различный ход решающего компонента напряжения в окрестности корня надреза и трещины; — σ_{yy} для надреза, - - - σ_{yy} для трещины

Рис. 2. Разные видоизменения образцов с шевроновым надрезом; а) короткий стержень, б) короткая штанга, с) для четырехточечного изгиба.

Рис. 3. Схематический ход зависимости силы P от прогиба у изгибающегося образца с шевроновым надрезом. С ... иницирование трещины; I ... область стабильного роста трещины, II ... область нестабильного роста трещины.

Рис. 4. Избранная геометрия надреза и размеры образца для численного расчета с помощью метода конечных элементов; $\alpha_0 = 0,25$, $\alpha = 1$.

Рис. 5. Дискретизация образца для метода конечных элементов при относительной длине трещины $a/w = 0,5$. Число элементов; 169, число узлов; 609.

Рис. 6. Зависимость функции Y^* от относительной длины трещины α согласно примененному численному решению и приближенных аналитических моделей; -Δ-Δ- решение Блума, -×-×- STCA модель, —□—□— на основании численной податливости, -○-○-, -●-●- на основании численных величин K_I .

FRACTURE TOUGHNESS OF CERAMIC MATERIALS—NUMERICAL K-CALIBRATION OF BENDING SPECIMENS WITH CHEVRON NOTCH

Jaroslava Zemánková, Jaroslav Joch*), Josef Kazda

Institute for Research of Motor Cars, 180 68 Prague 9

*) State Research Institute for Machine Construction, 250 97 Prague 9 — Běchovice

Fracture toughness of ceramic materials, K_{Ic} , is a significant quantity associated with the life and reliability of ceramic components in their engineering applications. This is why it should be determined as precisely as possible. The method based on specimens with chevron notches avoids a number of errors usually involved in the application of other methods. However, there is the disadvantage that the calibrating K function of the stress intensity factor for the crack arising at the notch of the specimen on bending is not precisely known. The function has so far

been substituted by approximations provided by analytical solutions of insufficient accuracy. The paper presents a three-dimensional numerical solution by the finite elements method which shows that the generally employed approximate solutions may give apparently higher results for fracture toughness of brittle materials. The different crack lengths yielded by the individual solutions at the transition from the stable crack growth to the unstable one, allows the results of numerical solutions to be verified experimentally.

Fig. 1. Different courses of the decisive component of stress in the neighbourhood of the notch and crack root, — σ_{yy} for the notch; - - - σ_{yy} for the crack.

Fig. 2. Various modifications of specimens with chevron notches; a) short rod, b) short bar, c) for four-point bending.

Fig. 3. Schematic course of the load-deflection dependence for a four-point bending specimen with chevron notch.

C. crack initiation; I — stable crack growth region, II — unstable crack growth region.

Fig. 4. The chosen notch geometry and specimen dimensions for numerical calculation by the finite element method. $\alpha_0 = 0.25$; $\alpha_1 = 1$.

Fig. 5. FEM discretization of the specimen at the relative crack length $a/w = 0.5$. Number of elements: 109, number of nodes: 609.

Fig. 6. Function Y vs. relative crack length α according to the results of the suggested numerical solution and the approximate analytical models: -Δ-Δ- Bluhm's solution; -×-×- STCA model: -□-□- from numerical compliance; -○-○-; -●-●- from numerical K values.

FRACTALS IN PHYSICS (Fraktaly ve fyzice). Redakce: L. Pietronero a E. Tosatti. 476 str., North-Holland, Amsterdam 1986.

Kniha je sborníkem referátů z mezinárodního sympozia „Fraktaly ve fyzice“, které se konalo v Terstu 9. – 12. července 1985 pod záštitou ICTP (International Center for Theoretical Physics).

Pojem fraktál byl zaveden před 5 – 10 lety jako vhodný nástroj k popisu zdánlivě zcela nepravidelných struktur. Obrazec vytvářející se při rozmanitých nerovnovážných růstových procesech (např. šíření lomu v pevné látkě, dendritický růst krystalu, prosakování tekutin do půrovitého prostředí, tvrdnutí cementové kaše apod.) mají obvykle společné rysy, které lze definovat jako fraktálové struktury (viz Mandelbrot B. B.: The Fractal Geometry of Nature, Freeman, San Francisco 1983, Stanley H. E., Ostrowsky N.: On Growth and Form. Fractal and Nonfractal Patterns in Physics. Martin Nijhoff, Dordrecht 1985). V Euklidově geometrii rozlišujeme bodové, čarové, plošné a objemové útvary. Každá tato třída je charakterizována počtem rozměrů nutných k jejímu popisu. Např. čára má jeden rozměr, předpokládá se, že je hladká (ve všech bodech diferencovatelná) a má zcela určitou délku. Tvary vyskytující se v přírodě jsou však méně pravidelné. Čára může mít tvar složitého meandru fadou diskontinuit. Pro třídění přírodních útvarů můžeme použít sice stejného způsobu jako v geometrii Euklidově, ale charakteristický rozměr bude vždy větší než u útvaru hladkého, a to o část, která je mříhou jeho nepravidelnosti. Hladká euklidovská čára má rozměr 1, čára s fraktálovým rozměrem 1,6 má vyšší stupeň nepravidelnosti než čára např. s rozměrem 1,2. Rozměr fraktálu, který lze stanovit experimentálně, je kvantitativním údajem charakterizujícím nepravidelnost daného útvaru. Všechny nepravidelné formy nemají však povahu fraktálu. Podmínkou je, aby daný útvar byl tvarově stejný nebo alespoň podobný, ať se na něj díváme při jakémkoliv zvětšení. To je požadavek, který nazýváme samopodobnost (self-similarity).

Cílem sympozia bylo poskytnout přehled fyzikálních jevů, u nichž se projevuje jako společný znak fraktálový charakter. Referáty jsou rozděleny podle tematiky do 9 částí. První pojednává o obecných vlastnostech fraktálů, základních pojmech a matematické teorii, druhá se zabývá analýzou fraktálových vlastností materiálů, zejména strukturou a způsoby měření fraktálové dimenze. Ve třetí části jsou zahrnutý referáty o polymerech, čtvrtá obsahuje referáty o problémech gelatinace, o otázkách roзвětvených polymerů a o pojmu perkolace. Pátá kapitola je rozdělena do dvou oddílů, v prvním jsou zařazeny referáty o průrazu dielektrik a lomu pevných materiálů, ve druhém jsou zahrnutý referáty o agregaci koloidních částic, dendritickém růstu krystalů a agregaci klastrů. Šestá část obsahuje referáty o kinetice vzniku klastrů irreverzibilní agregaci. Sedmá se zabývá dynamickými vlastnostmi fraktálových struktur a referáty v osmé části se týkají skel a metastabilních systémů. Poslední devátá skupina referátů má název: chaos, turbulence a příbuzné jevy.

Pojem fraktálu otvírá zcela nový pohled na celou řadu jevů a kniha přinese mnoho cenných inspirací, zejména výzkumným pracovníkům z oboru vědy o materiálech.

Satařava