Původní práce

THE FORMING OF CERAMIC PASTE, PART I — MATHEMATICAL MODEL

JIŘÍ HAVRDA, JANA TRÁVNÍČKOVÁ, FRANTIŠEK OUJIŘÍ

Department of Silicate Technology, Institute of Chemical Technology, Suchbátarova 5, 166 28 Prague 6

Received 8. 2. 1988

The forming of ceramic pastes is described quantitatively on the basis of mathematical modelling. On the assumption that the forming of ceramic pastes is a process involving joint sharing of weight and momentum, a mathematical model of paste flow through a pipe describing the velocity conditions in the extruder mouth during the forming process was worked out on the basis of balance equations for certain simplifying assumptions.

INTRODUCTION

The forming of ceramic pastes on auger or piston extruders provided with a forming mouth is a typical operation finding wide application in ceramics technology. The course of this operation can be studied and described in two ways. The first procedure is experimental, being based on empirical determination of the respective parameters and their dependence on various mutually variable quantities [1]. This procedure is demanding with respect to the number of experiments required and does not always lead to optimal parameters of the operation being studied, as the methods employed are not always based on a unified theory. The latter procedure makes use of mathematical modelling which strives to determine the principle of the operation described and to describe its course mathematically on well defined materials. The procedure can be summarized in a simplified way into the following points:

a) creation of a general model of the respective process by setting up the basic balances and constitutive equations, and determining the respective material constants involved;

b) determination of the initial and boundary conditions necessary for the solution of the general model on the basis of an analysis of the technological operation in question;

c) creation of a mathematical description of the course of the technological operation involved by resolving the general model;

d) verifying the suitability of the simplifying assumptions introduced by comparing the model with experimental results, while at the same time assessing the correctness of the initial and boundary conditions introduced into the formulation of the problem.

The present study has the purpose to work out a model of flow of ceramic paste through the extruder mouth in order to describe the forming of cylindrical bodies.

BALANCE AND CONSTITUTIVE EQUATIONS

If the ceramic paste meets the condition of continuity and the external forces are those of gravity only, the mass balance has the form [2, 3, 4]:

$$D\varrho/Dt + \varrho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \tag{1}$$

and the equation of flow is as follows:

$$\varrho(D\mathbf{v}/Dt) = \operatorname{div} \mathbf{P} + \varrho\mathbf{g}, \tag{2}$$

where ϱ is the density, t is time, $\mathbf{v}$ is velocity, $\varrho D\mathbf{v}/Dt = \partial\varrho\mathbf{v}/\partial t + \mathbf{v} \operatorname{grad} \varrho\mathbf{v}$ is the substantional derivative of momentum, $\mathbf{g}$ is gravity and P is the stress tensor. The solution of equation (2) for a particular liquid (ceramic paste) is associated with expressing P, i.e. with determining the constitutive equation of the liquid. Constitutive equations are dealt with by the thermodynamics of irreversible processes. The balance of the momentum indicates that tensor P is symmetrical and in the case of liquids can be divided as follows:

$$\mathbf{P} = -\boldsymbol{\delta}\mathrm{p} + \boldsymbol{\tau}, \tag{3}$$

where δp is the reversible part while p is the isotropic pressure, δ is the unit tensor and $\boldsymbol{\tau}$ is the dynamic stress tensor. For an incompressible liquid, i.e. if $\varrho = \text{const}$, joining (2) and (3) yields the flow equation in the form:

$$\varrho(D\mathbf{v}/Dt) = \varrho\mathbf{g} - \operatorname{grad} p + \operatorname{div} \boldsymbol{\tau}, \tag{4}$$

and equation (1) acquires the form:

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0. \tag{5}$$

On the assumption that the dynamic stress tensor $\boldsymbol{\tau}$ is explicitly determined by the stretching tensor and that the ceramic paste is characterized by variable apparent viscosity η, the non-linear consititutive equation of the ceramic pastes has the form [2, 3]

$$\boldsymbol{\tau} = 2\eta(S)\mathbf{d}, \tag{6}$$

where $\mathbf{d}$ is the stretching tensor, and for parameter S it holds that

$$S = 2\mathbf{d} : \mathbf{d}. \tag{7}$$

Solution of equation (4) and introduction of (6) yields a generalized form of the dynamic Navier Stokes equation

$$\varrho D\mathbf{v}/Dt = \varrho\mathbf{g} - \operatorname{grad} p + 2\eta(S) \operatorname{div} \operatorname{grad} \mathbf{v} + 2\mathbf{d} \operatorname{grad} \eta(S). \tag{8}$$

MODEL OF THE FORMING OF CYLINDRICAL BODIES IN THE EXTRUDER MOUTH

The principle of forming ceramic bodies is based on the flow of paste through the extruder mouth. If the paste moves through the extruder mouth under the effect of a strength field, it is also subject to compaction and its texture, which determines the porosity of the final body, is created. The texture and compaction uniformity throughout the body volume are important factors of the course of subsequent technological operations (i.e. drying, firing) and influence the final properties of the ware. The velocity field arising during flow through the mouth is proportional to the acting force or stress at the given point. For this reason the velocity field can be regarded as an adequate criterion suitable for assessing the conditions of conducting the process. To control the process of forming bodies of ceramic paste one should therefore know the velocity profile of flow through the extruder mouth, because its character is decisive for the preparation of homogeneous bodies.

Description of the forming of cylindrical bodies is associated with resolving the paste flow through a circular extruder mouth, which can be simulated by horizontal flow through a pipe R in radius and L in length in the direction of pipe axis x. For the component in direction x, the dynamic equation (4) in cylindrical ordinates acquires the form

$$\varrho(D\mathrm{v}_x/Dt) = (-\partial p/\partial x) - [(r^{-1}\,\partial(r\tau_{rx})/\partial r) + (r^{-1}\,\partial\tau_{\varphi x}/\partial\varphi) + \partial\tau_{xx}/\partial x], \tag{10}$$

and using rearrangement of (6) the following expressions are obtained for the individual stress components:

$$\begin{aligned} \tau_{rx} &= -\eta(S)\,[(\partial v_x/\partial r) + \partial v_r/\partial x], \\ \tau_{\varphi x} &= -\eta(S)\,[(\partial v_\varphi/\partial x) + r^{-1}\,\partial v_x/\partial\varphi], \\ \tau_{xx} &= -2\eta(S)\,\partial v_x/\partial x. \end{aligned} \tag{11}$$

Joining of equations (10) and (11) yields a dynamic equation for the calculation of the velocity field.

Forming on augers is a continuous process. Beyond the starting stages of the process, the forming proceeds under the conditions of steady-state flow with a constant pressure gradient. On the assumption that the heat liberated by friction during the paste flow is completely dissipated into the environment by transmission, that the arising temperature gradients are negligible and do not affect the material quantities, equation (10) for stationary horizontal laminar flow with a fully developed velocity profile under isothermal conditions acquires the form

$$\Delta p/L = r^{-1}\,\mathrm{d}(r\tau_{rx})/\mathrm{d}r. \tag{12}$$

For unidirectional flow, equation (7) has the form

$$S = \gamma^2, \tag{13}$$

where $\gamma = \mathrm{d}v_x/\mathrm{d}r$ is the shear rate gradient. In view of (13), the constitutive equation (6) will have the form

$$\tau_{rx} = \eta(\gamma^2)\,\mathrm{d}v_x/\mathrm{d}r. \tag{14}$$

The boundary conditions can be formulated on the basis of assumed knowledge of mouth wall velocity and the symmetry condition as follows:

$$\begin{array}{lll} t > 0 \quad & r = 0 \quad & \mathrm{d}v_x/\mathrm{d}r = 0 \\ & r = R \quad & v_x = 0, \end{array} \tag{15}$$

or, on assuming that the stress distribution τ_{rx} is given as

$$\tau_{rx} = \tau_s r/R, \tag{16}$$

where it holds for shear stress at the mouth wall, τ_s, that

$$\tau_s = \Delta pR/2L, \tag{17}$$

the boundary conditions are as follows:

$$t > 0 \qquad r = 0 \qquad \tau_{rx} = 0$$
$$r = R \qquad \tau_{rx} = \tau_s. \tag{18}$$

Joint resolving of equations (10) and (14) for conditions (18) yields the following equation for volumetric rate of flow, $\dot{V}$:

$$\dot{V}/\pi R^3 = \tau_s^{-3} \int_0^{\tau_s} \tau_{rx}^2 f(\tau_{rx}) \, \mathrm{d}\tau_{rx}, \tag{19}$$

the velocity profile is given by the equation:

$$v_x(r) = \int_0^R f(\tau_{rx}) \, \mathrm{d}r, \tag{20}$$

and the average flow velocity is given by equation:

$$\bar{v}_x = R^{-1} \int_0^R v_x(r) \, \mathrm{d}r, \tag{21}$$

where $f(\tau_{rx})$ represents inverse functional expression of constitutive equation (14).

If the ceramic paste is described by the constitutive equation [5, 6, 7]

$$\tau_{rx} = \tau_0 + K(\mathrm{d}v_x/\mathrm{d}r)^n, \tag{22}$$

where τ_0 is the yield stress, K is the consistence factor and n is the flow index; equation (18) can then be written in the following concrete form:

$$\dot{V}/\pi R^3 = (K^{1/n}\tau_s^3)^{-1} (\tau_s - \tau_0)^{1+1/n}[(\tau_s - \tau_0)^2 (3 + 1/n)^{-1} + \tau_0^2(1 + 1/n)^{-1} + \\ + 2\tau_0(\tau_s - \tau_0) (2 + 1/n)^{-1}. \tag{23}$$

For velocity profile (20) over the interval $r_0 \leqq r \leqq R$, $\tau_0 \leqq \tau_{rx} \leqq \tau_s$ one obtains

$$v_x(r) = 2L[K^{1/n}(1 + 1/n) \, \Delta p]^{-1} [(\tau_s - \tau_0)^{1+1/n} - ((r \, \Delta p/2L) - \tau_0)^{1+1/n}], \tag{24}$$

and over the interval $0 \leqq r \leqq r_0$, $0 \leqq \tau_{rx} \leqq \tau_0$ it holds that

$$v_x(r_0) = 2L[K^{1/n}(1 + 1/n) \, \Delta p]^{-1} [(\tau_s - \tau_0)^{1+1/n}], \tag{25}$$

where $r_0 = (\tau_0/\tau_s) \, R$.

For the average velocity, equation (21) has the form

$$\bar{v}_x = 2L(R \, \Delta p(1 + 1/n) \, K^{1/n})^{-1} [R(\tau_s - \tau_0)^{1+1/n} - \\ - 2L(\Delta p(2 + 1/n))^{-1} ((\Delta p R/2L) - \tau_0)^{2+1/n}]. \tag{26}$$

References

[1] Havrda J., Trávníčková J., Oujiří F.: Silikáty *32*, 351 (1988).

[2] Astarita G., Marruci G.: *Principles of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, McGraw-Hill, London 1974.

[3] Billington E. W., Tate A.: *The Physics of Deformation and Flow*, McGraw-Hill, New York 1981.

[4] Astarita G.: *An Introduction to Non-linear Continuum Thermodynamics*, Societe Editrice di Chimica, Milano 1975.

[5] Skelland A. H. J.: *Non-Newtonian Flow and Heat Transfer*, J. Willey, New York 1967.
[6] Govier A., Azis J.: *The Flow of Complex Mixtures in Pipes*, Van Nostrand, New York 1972.
[7] Han Chang Dae: *Rheology in Polymer Processing*, Academic Press, New York 1976.

TVAROVÁNÍ KERAMICKÉ PASTY, ČÁST I — MATEMATICKÝ MODEL

Jiří Havrda, Jana Trávníčková, František Oujiří

Katedra technologie silikátů, Vysoká škola chemicko-technologická, 166 28 Praha

Vypracován je kvantitativní popis tvarování keramických past umožňující řízení a optimalizaci daného procesu. Společným řešením bilancí hmotnosti a hybnosti se zavedením zjednodušujících předpokladů byl pro zvolené okrajové podmínky vypracován matematický model toku pasty trubkou popisující rychlostní poměry v kruhovém ústí lisu při procesu tvarování. Konstitutivní rovnice byla vyjádřena za předpokladu, že tenzor napětí je jednoznačně určen tenzorem rychlosti deformace a keramická pasta je charakterizována proměnnou zdánlivou viskozitou. Řešením modelu pro konkrétní keramickou pastu popsanou rovnicí viskoplastického materiálu byly získány vztahy pro výpočet objemového průtoku, rychlostního profilu a střední rychlosti při procesu tvarování těles tvaru válce.

CAKMAK A. S., BOTHA E. J., GRAY W. G.: COMPUTATIONAL AND APPLIED MATHEMATICS FOR ENGINEERING ANALYSIS (Výpočetní a aplikovaná matematika pro inženýrskou analýzu). 380 str., Springer-Verlag, Berlín, 1987. Cena 118 DM.

Kniha je učebnicí pro inženýry a zahrnuje širokou škálu matematických disciplín, které inženýr musí zvládnout. Motivací pro výběr látky byla vždy její užitečnost v inženýrské praxi. Co se týká matematické rigoróznosti, snažili se autoři použít pouze minimum teorie nutné k výkladu látky. Koncepce knihy je jedinečná v tom smyslu, že zahrnuje analytické aproximativní a numerické metody pro řešení inženýrských problémů.

První čtyři kapitoly se zabývají řadami a jejich konvergencí, pojmem integrace a způsoby vyhodnocování integrálů, lineární algebrou a základy tenzorového počtu. Pátá kapitola zavádí pojem integrálních rovnic a přináší úvod do počtu variačního. V šesté a sedmé kapitole je pojednáno o řešení obyčejných diferenciálních rovnic, včetně aproximativních technik. Osmá kapitola se zabývá parciálními diferenciálními rovnicemi a devátá je úvodem do numerických metod řešení obyčejných i parciálních diferenciálních rovnic.

Způsob podání předpokládá, že čtenář je seznámen se základy lineární algebry, vektorové analýzy, s teorií funkcí komplexní proměnné a se základy řešení diferenciálních rovnic v rozsahu, v jakém jsou tyto disciplíny přednášeny v základním kursu na vysokých školách technického směru. Za každou kapitolou je uvedena řada příkladů, jejichž vyřešením se čtenář snadno ujistí o tom, do jaké míry látku pochopil.

Celá učebnice představuje dvousemestrální předmět, který první dva její autoři v tomto rozsahu přednášeli na Princetownské univerzitě pro graduované studenty stavebního, chemického a strojního inženýrství. Knihu lze vřele doporučit i našim inženýrům.

Šatava

CONCISE SCIENCE DICTIONARY (Stručný naučný slovník vědy). 762 str. včetně obr., Oxford University Press 1987. Cena 5,95 liber.

Slovník má sloužit studujícím přírodních věd, zejména v jejich prvním roce univerzitního studia. Má jim vysvětlit význam neznámých slov, s nimiž se setkají v disciplíně, kterou si zvolili, nebo v disciplínách příbuzných. Cennou příručkou může být slovník ovšem i pro laiky, kteří budou potřebovat přesnou definici vědeckého výrazu, s nímž se setkají ve své práci nebo i četbě.

Slovník poskytuje výklad výrazů a pojmů z fyziky, chemie, biologie, biochemie, paleontologie, geologie, mineralogie a také klíčových pojmů z astronomie, matematiky a technologie počítačů. Jsou zde i hesla týkající se nejnovějších poznatků přírodních věd a jejich zpracování je vždy dobře srozumitelné. Díky uváženému výběru hesel a jejich stručnému a výstižnému zpracování se redakci a kolektivu přispivatelů podařilo vytvořit vynikající naučný slovník.

Šatava