

# VÝPOČET TŘÍROZMĚRNÉHO PROUDĚNÍ SKLOVINY METODOU MULTIGRID

PETR SCHILL

*Státní výzkumný ústav sklářský, Škroupova 957, 501 92 Hradec Králové*

Došlo 6. 10. 1988

*Je uvedena účinná výpočetní procedura pro třírozměrné stacionární rychlostní a teplotní pole ve sklovině. Algoritmus je založen na svázaném diferencčním řešení rovnic hybnosti, kontinuity a energie v primitivních proměnných pomocí koncepce multigríd. Modelové parciální diferenciální rovnice jsou diskretizovány v třikrát přeložené síti pomocí hybridního diferencčního schématu, které využívá metodu dílčích oblastí pro zajištění numerické stability výpočtu. Pro iterační proceduru je použita symetrická svázaná Gauss-Seidelova technika, která vykazuje velmi rychlou konvergenci. Testovací výpočet proudění skloviny v modelové peci se svázanými elektrodami byl proveden pomocí dvou úrovní síti o  $10 \times 10 \times 12$  a  $18 \times 18 \times 22$  uzlech. Byla zjištěna dobrá stabilita výpočtu a značné, řádové zvýšení konvergenční rychlosti oproti dříve užívaným segregáčním a jednositovým metodám.*

## ÚVOD

Hlavní část matematických modelů sklářských pecí představuje výpočetní postup pro simulaci fyzikálních polí (teplotní, rychlostní, elektrická, apod.). Předložená práce je zaměřena na numerické řešení rovnic hybnosti, kontinuity a energie pro stacionární simulaci rychlostního a teplotního pole v třírozměrné oblasti skloviny s tyčovými elektrodami.

Pro inženýrské výpočty rychlostních polí jsou v současné době rozšířeny algoritmy typu SIMPLE vyvinuté Harlowem a Welchem [1] a Patankarem a Spaldingem [2]. Tyto algoritmy používají segregáční koncepci, která spočívá v tom, že se z aproximačního tvaru rovnice hybnosti a kontinuity nejprve odvodí korekční rovnice pro tlak. Potom se ve velkých cyklech řeší střídavě rovnice hybnosti a korekční rovnice tlaku. Korekce tlaku, získané na základě požadavku splnění rovnice kontinuity, se používají pro postupné upřesňování hodnot rychlostí v každém velkém cyklu. Tyto makrocykly, které oddělují veličiny rychlosti a tlaku (odtud název segregáční metody), se opakují až do dosažení požadované přesnosti.

Uvedená segregáční technika spolu s řešením dalšího, teplotního pole byla aplikována i na proudění skloviny, ale autorovi se nepodařilo dosáhnout přijatelné rychlosti konvergence. Pomalá konvergenční rychlost (a v některých případech i vznik určitých nestabilit) byla zřejmě způsobena jednak oddělením všech fyzikálních polí v průběhu numerického procesu řešení, jednak přítomností elektrod, které vytvářejí určitý druh diskontinuit. Z uvedených důvodů byla pro modelování skloviny aplikována zcela jiná koncepce, jejíž novost spočívá ve dvou směrech: použití svázaných blokových metod ve vlastních relaxačních cyklech a vytvoření makrocyklů na základě víceúrovňové techniky multigríd.

Uvedený algoritmus vychází z koncepce svázaného řešení rovnic hybnosti a kontinuity, kterou prakticky rozvedl Vanka [3] a která byla dále rozšířena připojením energetické rovnice. Tzn., že rychlosti, tlak a teplota jsou aktivovány simultánně a není potřeba žádných dodatečných rovnic korekce tlaku. Vztahy mezi tlakem a rychlostmi a rovněž mezi teplotou a rychlostmi jsou implicitně

zachovány. Jinými slovy, celková vazba mezi nuceným prouděním, vztlakovými jevy, požadavky kontinuity a přenosem energie je velmi těsná. Takovým svázáním veličin uvnitř numerického výpočtu se značně posílila jeho stabilita i konvergence, zejména v blízkosti elektrod. Diferenciace rovnic je provedena v přesunutě síti hybridní technikou, která zaručuje stabilitu v místech s velkým Pecletovým ( $Pe$ ), popř. Reynoldsovým ( $Re$ ) číslem, kde se lokálně aplikuje metoda dílčích oblastí. Pro vlastní relaxační proceduru je použito blokové, symetricky svázané Gauss-Seidelovo schéma (SCGS). Relaxační procedury jsou prováděny střídavě na hrubé a jemné síti, přičemž se mezi těmito sítěmi přenášejí rezidua a korekce podle systému FAS-FMG dvouúrovňové metody multigrid [4].

#### MODELOVÉ ROVNICE A JEJICH DIFERENCIACE

Stacionární, třírozměrné teplotně závislé proudění je popsáno těmito parciálními diferenciálními rovnicemi:

$$\nu \nabla^2 u - \mathbf{V} \cdot \text{grad } u - \partial P / \partial x = 0, \quad (1)$$

$$\nu \nabla^2 v - \mathbf{V} \cdot \text{grad } v - \partial P / \partial y = 0, \quad (2)$$

$$\nu \nabla^2 w - \mathbf{V} \cdot \text{grad } w - \partial P / \partial z = g\beta(T - T_R), \quad (3)$$

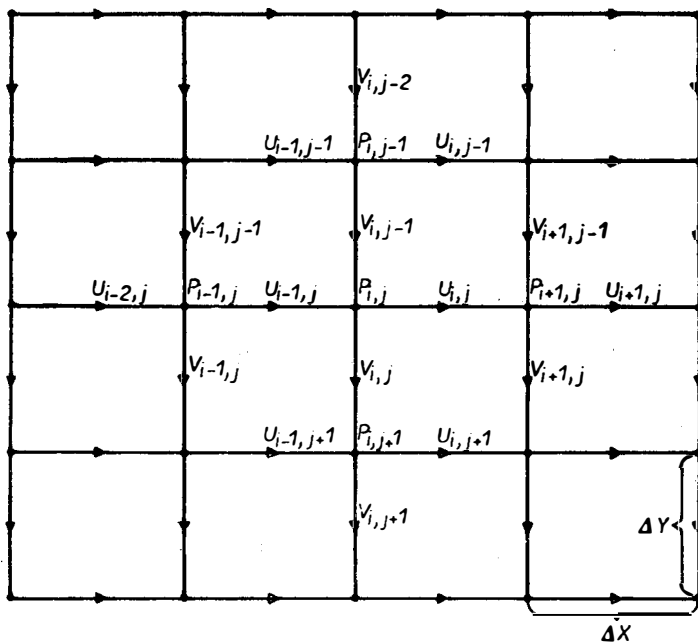
$$\text{div } \mathbf{V} = 0, \quad (4)$$

$$a \nabla^2 T - \mathbf{V} \cdot \text{grad } T = -Q. \quad (5)$$

Symbole  $u$ ,  $v$ ,  $w$  představují složky vektoru rychlosti  $\mathbf{V}$  podél směrů  $x$ ,  $y$ ,  $z$ .  $T$  je teplota,  $\rho$ ,  $\nu$ ,  $a$  označují hustotu, kinematickou viskozitu a efektivní teplotní vodivost. Vzhledem k použité Boussinesqově aproximaci vztlakového členu ve tvaru  $\rho_R g \beta (T - T_R)$ , s referenční teplotou  $T_R$ , je zaveden fiktivní tlak  $P = P_{tr} / \rho_R - gz$ , kde  $P_{tr}$  je skutečný fyzikální tlak. Pro vyjádření zářivého přenosu ve sklovině byla použita Rosselandova aproximace s efektivní teplotní vodivostí  $a$ . Tepelný zdroj  $Q$  v energetické rovnici (5) je vyjádřen na základě středního elektrického Jouleova výkonu  $Q_E$  ve tvaru  $Q = Q_E / \rho c$ , kde  $c$  je měrné teplo skloviny. Výpočetní postup pro stanovení  $Q_E$  je uveden např. v [5].

Všechny proměnné jsou uloženy v třikrát přeložené třírozměrné síti. Pro tři složky rychlosti jsou generovány tři nové sítě, které jsou v odpovídajících směrech posunuty vždy o polovinu diference dopředu vzhledem k základní síti pro tlak a teplotu. V prostorovém měřítku to znamená, že rychlosti jsou ve středech stěn elementárních buněk a teplota, tlak a zdrojový člen v centrech těchto buněk. Toto uspořádání má výhodu v dosažení stejné přesnosti diferenční náhrady pro derivaci tlaku a pro druhé derivace složek rychlostí [2]. Na obr. 1 je v průmětu  $XY$  znázorněna základní síť pro  $T$  a  $P$  a dvě přesunutě sítě: ve směru  $x$  pro složku  $u$  a ve směru  $y$  pro složku  $v$ .

Diskrétní rovnice jsou odvozeny pomocí integrace diferenciálních rovnic přes elementární objemy obklopující každou proměnnou. Pro rovnice (1), (2), (3), (5) je užito hybridní diferenční schéma [3], [6], které zavádí centrální diference 2. řádu přesnosti pro konvekční i difúzní členy, ale v místech, kde Reynoldsovo ( $Re$ ), popř. Pecletovo ( $Pe$ ) lokální číslo převyšuje hodnotu 2, automaticky modifikuje diferenční proceduru na speciální [6] tvar dílčích oblastí (metoda partikulárních řešení). Hybridní schéma má výhodu v zaručení stability pro velká ( $\geq 2$ ) lokální  $Re$ , popř.  $Pe$ , a v dosažení druhého řádu přesnosti pro malá  $Re$ , popř.  $Pe$ . Diferenci-



Obr. 1. Schéma přesunuté sítě v rovině XY.

ace všech uvedených rovnic se provádí stejným způsobem. Nejprve se upraví na tvar (příklad rovnice pro složku  $w$ )

$$\nu \left( w_{xx} - \frac{u}{r} w_x \right) + \nu \left( w_{yy} - \frac{v}{r} w_y \right) + \nu \left( w_{zz} - \frac{w}{r} w_z \right) - P_z = g\beta(T - T_R),$$

který se v okolí středového uzlu  $w_0 = w_{ijk}$  diferencuje tímto způsobem

$$D_{i-1}^w w_{i-1} + D_{i+1}^w w_{i+1} + D_{j-1}^w w_{j-1} + D_{j+1}^w w_{j+1} + D_{k-1}^w w_{k-1} + D_{k+1}^w w_{k+1} - S_0^w - (P_{k+1} - P_0)/\Delta z - g\beta(T_0 + T_{k+1})/2 = -g\beta T_R. \quad (6)$$

V případech, kde je to možné, jsou pro zjednodušení vypuštěny základní indexy  $i, j, k$ . Člen  $S_0^w = \sum_{n=1}^6 D_n^w$  je zkrácený zápis pro součet 6 sousedních hodnot  $D_n^w$ .

Koeficienty  $D_n^w$  obsahují rychlosti (ve formě parametrů z důvodů lokální linearity), difúzní koeficienty a prostorové diferencní kroky (obecně pro nerovnoměrnou síť) ve tvaru určeném velikostí příslušného  $Re$ . Např. pro směr  $x$  byly odvozeny tyto tvary koeficientů  $D_{i-1}^w, D_{i+1}^w$ :

Pro  $|Re_{i-1}^w| < 2$  a  $|Re_i^w| < 2$  centrální diference:

$$D_{i-1}^w = \frac{\nu}{\Delta x_{i-1}^2} \cdot \frac{2 + h \cdot Re_{i-1}^w}{1 + h}; \quad D_{i+1}^w = \frac{\nu}{\Delta x_i^2} \cdot \frac{2h - Re_i^w}{1 + h}. \quad (7)$$

Pro  $|Re_{i-1}^w| \leq 2$  nebo  $|Re_i^w| \geq 2$  metoda dílčích oblastí:

$$D_{i-1}^w = \frac{\nu}{\Delta x_{i-1}^2} \cdot \frac{E_{i-1}}{h(1-E_i)/Re_i^w - (1-E_{i-1})/Re_{i-1}^w},$$

$$D_{i+1}^w = \frac{\nu}{\Delta x_i^2} \cdot \frac{E_i}{(1-E_i)/Re_i^w - (1-E_{i-1})/(h \cdot Re_{i-1}^w)},$$
(8)

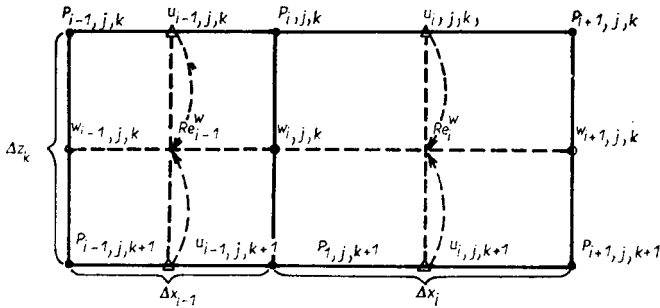
kde pro  $E_{i-1}$ ,  $E_i$  je použita exponenciální funkce  $\mathcal{E}(x)$  ve tvaru

$$E_{i-1} = \mathcal{E}(Re_{i-1}^w); \quad E_i = \mathcal{E}(-Re_i^w); \quad \mathcal{E}(x) = x/(1 - e^{-x}); \quad h = \Delta x_i/\Delta x_{i-1}.$$

Lokální Reynoldsova čísla se používají ve formě

$$Re_{i-1}^w = \frac{u_{i-1,j,k} + u_{i-1,j,k+1}}{2\nu} \cdot \Delta x_{i-1}; \quad Re_i^w = \frac{u_{ijk} + u_{i,j,k+1}}{2\nu} \cdot \Delta x_i.$$

Označení diferencí a umístění veličin v přeložené síti je zřejmé z následujícího nákresu



Ve vztahu (8) je nutno zavést vhodnou polynomičnou aproximaci v singulárním bodu  $Re = 0$  a jeho okolí. Koefficienty  $D_{j-1}^w$ ,  $D_{j+1}^w$ ,  $D_{k-1}^w$ ,  $D_{k+1}^w$  pro směry  $y$  a  $z$  se stanoví analogickým způsobem. Při diskretizaci energetické rovnice (5) se místo Reynoldsova čísla používá lokální Pecletovo číslo, které má v přeložené síti jednoduchý tvar typu

$$Pe_{i-1} = \frac{u_{i-1}}{a_0} \cdot \Delta x_{i-1}; \quad Pe_i = \frac{u_i}{a_0} \cdot \Delta x_i.$$

### KONCEPCE MULTIGRID

Multigríd, přesněji Multi-Level Adaptive Technique (MLAT) [4], je numerická strategie řešení spojitých úloh cyklováním mezi hrubšími a jemnějšími úrovněmi jejich diskretizace. K tomu se používá sekvence sítí (úrovní) se zmenšující se geometrickou diferenciací. Proces řešení zahrnuje relaxační (iterační) cykly na každé síti, interpolace korekcí z hrubých sítí do jemných a přenosy reziduí z jemných sítí do hrubých.

Pro soustavu eliptických diferencních rovnic

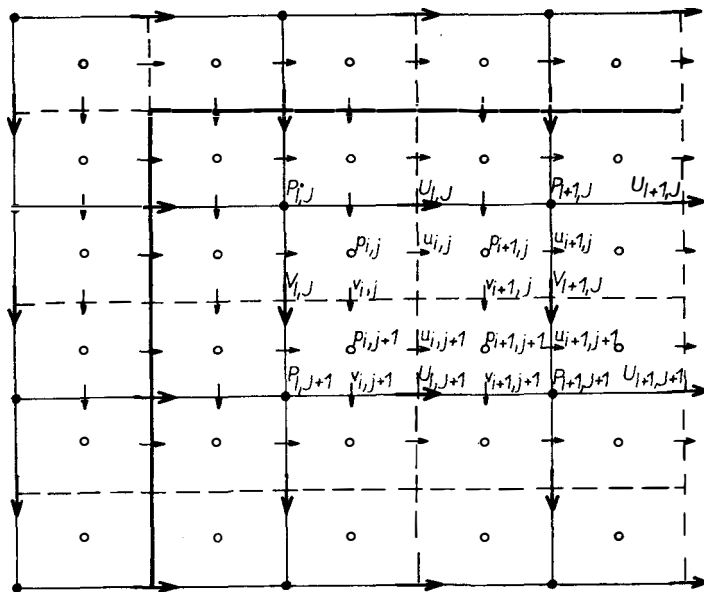
$$Lq = F$$
(9)

je známo, že příslušná jednosíťová iterační schémata konvergují dosti rychle pro

několik prvních iterací, ale velmi pomalu pro následující iterace. Fourierova analýza redukce chyb ukazuje, že tyto procedury jsou velmi účinné při vyhlazování chyb vlnové délky srovnatelné s diferencním krokem sítě, ale téměř neúčinné při redukování nízkofrekvenčních (dlouhovlných) složek chyb. Avšak nízké frekvence na určité síti jsou relativně větší na sítích hrubších (s větším diferencním krokem). Tedy každý frekvenční rozsah chyb musí být vyhlazen na takové síti, kde je to nejvýhodnější. Z toho plyne koncepce multigríd, spočívající v cyklování mezi hrubšími a jemnějšími sítěmi tak dlouho, až se uspokojivě vyhladí všechny frekvenční složky chyb. Bylo navrženo mnoho variant metody multigríd a způsobů cyklování. Pro lineární systémy je vhodné např. korekční schéma (CS) a pro nelineární úlohy obecnější schéma úplné aproximace (FAS).

APLIKOVANÝ ALGORITMUS

Pro řešení modelových rovnic (1) — (5) proudění skloviny byl zvolen [7] postup úplné aproximace úplné metody multigríd (FAS-FMG) s počáteční aproximací v jemné síti nevycházející z nulových hodnot, ale vytvořenou přenesením hodnot úvodního přibližného řešení z hrubé sítě. Byly generovány pouze dvě úrovně sítí (hrubá  $c$  a jemná  $f$ ) s poměrem diferencí 0,5 v každém směru. Vnoření sítí je provedeno tak, aby zůstalo zachováno postavení hranic vzhledem k okrajovým uzlům i v přeložených sítích pro všechny složky rychlosti (obr. 2). Iterace  $m$



Obr. 2. Uspořádání přesunutě jemné a hrubé sítě v rovině XY.

začínají na hrubé síti  $c$ , kde se hledá řešení nelineární úlohy (9) v korekčním formě (pro neznámé korekce  $\delta q^c$ ):

$$L^c \delta q^c = F^c - L^c q^c(m - 1) \equiv R^c(m - 1), \quad q^c(m) = q^c(m - 1) + \delta q^c. \quad (10)$$

Přitom se používá symetricky svázané Gaussovo-Seidelovo schéma (SCGS). V každém uzlu  $ijk$  základní sítě se simultánně řeší pohybové rovnice a rovnice kontinuity pro 6 složek rychlosti  $u_{ijk}$ ,  $u_{i-1,j,k}$ ,  $v_{ijk}$ ,  $v_{i,j-1,k}$ ,  $w_{ijk}$ ,  $w_{i,j,k-1}$  ve stěnách buňky a pro tlak  $P_{ijk} = P_0$  ve středu buňky a energetická rovnice pro teplotu  $T_{ijk} = T_0$  ve středu buňky. To znamená, že každá složka rychlosti se během jednoho SCGS cyklu aktivuje dvakrát. Řešení tedy probíhá po malých SCGS blocích, kde každý blok je tvořen soustavou 8 korekčních rovnic následující struktury:

$$\begin{aligned}
 -\delta u_{i-1} S_{i-1}^u &- \delta P_0 / \Delta x = R_{i-1}^u, \\
 -\delta u_i S_i^u &+ \delta P_0 / \Delta x = R_i^u, \\
 -\delta v_{j-1} S_{j-1}^v &- \delta P_0 / \Delta y = R_{j-1}^v, \\
 -\delta v_j S_j^v &+ \delta P_0 / \Delta y = R_j^v, \\
 -\delta w_{k-1} S_{k-1}^w &- \delta P_0 / \Delta z - \delta T_0 g \beta / 2 = R_{k-1}^w, \\
 -\delta w_k S_k^w &+ \delta P_0 / \Delta z - \delta T_0 g \beta / 2 = R_k^w, \\
 -\delta u_{i-1} / \Delta x &+ \delta u_i / \Delta x - \delta v_{j-1} / \Delta y + \delta v_j / \Delta y - \delta w_{k-1} / \Delta z + \delta w_k / \Delta z = R_0^e, \\
 -\delta T_0 S_0^T &= R_0^T,
 \end{aligned} \tag{11}$$

kde rezidua  $R$  mají tvar typu

$$\begin{aligned}
 R_k^w &= -g\beta T_R - R1_k^w; \quad R_0^T = -Q - R1_0^T; \quad R1_0^T = \sum D_n^T T_n - T_0 S_0^T, \\
 R1_k^w &= \sum D_n^w w_n - w_k S_k^w - (P_{k+1} - P_0) / \Delta z - (T_0 + T_{k+1}) g \beta / 2.
 \end{aligned} \tag{12}$$

Nejdříve se z poslední (energetické) rovnice bloku (která obsahuje složky rychlosti ve formě parametrů) vypočte přímo teplotní korekce  $\delta T_0 = R_0^T / S_0^T$ . Potom se toto  $\delta T_0$  dosadí do dvou rovnic pro rychlost  $\delta w$  a zbývající soustava 7 rovnic se řeší analyticky (Dodatek 1), čímž se získají explicitní výrazy pro korekce rychlostí a tlaku. Vlastní hodnoty veličin v  $m$ -té iteraci se stanoví vztahy typu  $u_i(m) = u_i(m-1) + \delta u_i$ . V uvedeném procesu je nutné použít relaxační faktory  $\varepsilon < 1$ , protože rovnice v bloku jsou lokálně linearizovány. Relaxace se provádí modifikováním centrálních koeficientů  $S$  vztahem  $S = S/\varepsilon$ . Pro řešení proudění skloviny s tyčovými elektrodami byly pomocí numerických experimentů stanoveny optimální hodnoty  $\varepsilon^u = \varepsilon^v = \varepsilon^w = 0,8$ ,  $\varepsilon^T = \varepsilon^u/2$ , které jsou přibližně stejné pro hrubou i jemnou síť.

Dosažené konvergující řešení se pomocí transformačního operátoru  $I_i^c$  prodlouží do jemné sítě, kde se stává počáteční aproximací. Na jemné síti se provádějí relaxační cykly stejným postupem, jak bylo popsáno výše pro hrubou síť. Avšak iterace na jemné síti neprobíhají až do úplné redukce reziduí, ale přerušují se v okamžiku jejich vyhlazení, což se projeví tím, že vymizí silné fluktuace a rychlost konvergence se zpomalí a vyrovná. Pomocí transformačního operátoru  $I_j^c$  se potom přenesou dosažená rezidua  $\tilde{R}1^j$  a řešení  $\tilde{q}^j$  zpět do hrubé sítě, kde se označí  $\tilde{R}1$ ,  $\tilde{q}$ . Na hrubé síti se formulují potřebné linearizační koeficienty  $D$  rovnic (6) a stanoví se defekt

$$\tau = \tilde{L}^c(I_j^c \tilde{q}^j) - I_j^c(\tilde{R}1^j), \tag{13}$$

kde  $\tilde{L}^c$  je označení pro lokálně linearizovaný operátor pomocí zmíněných přenesených hodnot. Na hrubé síti se potom řeší rovnice

$$L^c q^c = F^c + \gamma \tau, \tag{14a}$$

ve svém korekčním tvaru pro neznámou korekci  $\delta q^c$ :

$$\begin{aligned} L^c \delta q^c &= (F^c + \gamma \tau) - L^c q^c(m-1) \equiv R^c(m-1), \\ q^c(m) &= q^c(m-1) + \delta q^c \end{aligned} \quad (14b)$$

Bylo rovněž zkoumáno užití  $\tau$ -extrapolace [4] s faktorem  $\gamma = 2^r/(2^r - 1)$ , kde  $r$  je lokální řád aproximace modelových rovnic. V přesunutě síti však během dosud provedených numerických testů nebyl zaznamenán její vliv na podstatnější urychlení konvergence. Řešení rovnic (14b) se provádí stejným blokovým postupem, jak bylo uvedeno výše. Jediným rozdílem oproti soustavě (10) je pozměněná pravá strana přidáním defektu  $\tau$ . Tento fakt má velkou výhodu, protože postačí naprogramovat pouze jednu proceduru pro všechny relaxační cykly v jemné i hrubé síti. Uvedené iterace rov. (14b) na hrubé síti musí však probíhat až do dosažení dobré aproximace řešení, ale protože jsou díky malému počtu uzlů poměrně rychlé, nepotřebují příliš mnoho strojového času.

Dosažené řešení  $\bar{q}^c$  na hrubé síti se nyní použije pro korigování starého řešení  $\bar{q}^f$  v jemné síti. To se provede tak, že se do jemné sítě interpolačně přenese (pomocí operátoru  $I_c^f$ ) buď rozdíl mezi získaným a počátečním řešením  $\delta q^c = \bar{q}^c - I_c^f \bar{q}^f$ , nebo přímo získané řešení  $\bar{q}^c$ . Nové řešení v jemné síti je potom dáno vztahem

$$q_{\text{new}}^f = \bar{q}^f + \varepsilon I_c^f \delta q^c = \bar{q}^f + \varepsilon I_c^f (\bar{q}^c - I_c^f \bar{q}^f) \quad (15)$$

ve všech uzlech kromě těch, kde je  $I_c^f \delta q^c$  srovnatelné s hodnotou  $\bar{q}^f$  (vnitřní diskontinuity, nebo rozhraní), kde se musí použít vztah

$$q_{\text{new}}^f = \bar{q}^f + \varepsilon (I_c^f \bar{q}^c - \bar{q}^f). \quad (16)$$

Pomocí numerických experimentů bylo zjištěno, že pro sklovinu s tyčovými elektrodami je zde nutno zavést relaxační faktory  $\varepsilon$ , a to stejné velikosti, jako byly použity v proceduře SCGS při řešení bloků (11).

Po stanovení hodnot  $q_{\text{new}}^f$  se provede ještě několik iterací v jemné síti k vyhlazení různých zkreslujících chyb vzniklých následkem přenosových aproximačních operací  $I_c^f$ . Tím je ukončen makrocyklus multigríd, který lze několikrát opakovat pro dosažení potřebné přesnosti diskrétní aproximace. Většinou stačí provést 2 až 3 makrocykly, kterými se dostaneme až k numerické přesnosti procesoru počítače. Počet vnitřních cyklů v jemné síti je vzhledem k požadavku pouhého vyhlazování chyb také velmi malý, přibližně 3 až 10 podle typu a rozsahu řešené úlohy.

Stanovení transformačních operací  $I_c^f$  a  $I_f^c$  vyžaduje značné pečlivosti, protože na nich do jisté míry závisí konvergenční rychlost i stabilita celého makrocyklu multigríd. Konkrétní tvar těchto operátorů byl převzat od Vanky [3] a je uveden v Dodatku 2.

#### TESTOVACÍ VÝPOČET

Konvergenční charakteristiky a stabilita algoritmu byly demonstrovány výpočtem teplotního proudění skloviny v pravoúhlé oblasti s jednou svislou elektrodou. Tato oblast  $0,72 \text{ m} \times 0,69 \text{ m} \times 0,52 \text{ m}$  představuje symetrickou polovinu malé modelové pece s výkonem  $2t/24 \text{ h}$ . Okrajové podmínky pro všechny složky rychlosti byly stanoveny důsledně Dirichletova typu a pro tlak nebylo nutno zavádět žádné okrajové podmínky (selfkonzistentnost tlaku). Pravá svislá hranice představuje symetrickou rovinu  $XZ$ . Nátok, tvořený zakládaným kmenem, je realizovaný rovnoměrným rozdělením normálových rychlostí  $w$  v horní vodorovné ploše  $XY$ . Výtokovou hranicí je vstup do průtoku v zadní svislé stěně  $YZ$ , který je charak-

terizovaný kvadratickým rozdělením normálových rychlostí  $u$ . Vstupní a výstupní hmotnostní tok je udržován na konstantní hodnotě 0,0116 kg/s. Všechny ostatní hranice pro rychlosti jsou neklouzavého typu. Okrajové podmínky pro teplotu jsou určeny zadanými ztrátami (tepelné toky 450 W/m<sup>2</sup> na bočních stěnách a ve dně a 65 800 W/m<sup>2</sup> v horní rovině kmene).

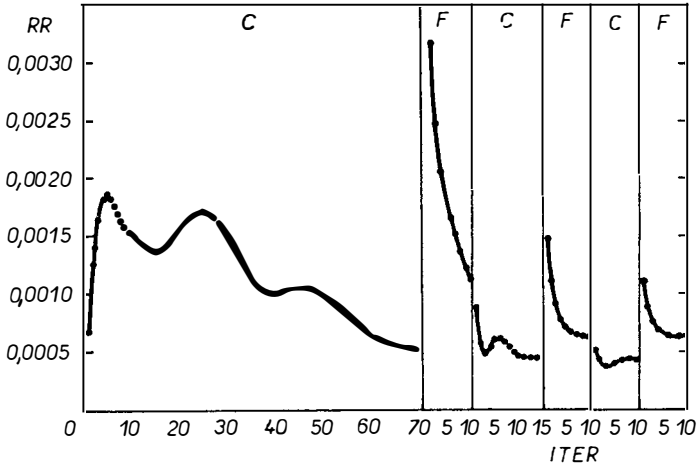
Pro výpočet metodou multigrid byly použity dvě úrovně sítí: jemná s  $18 \times 18 \times 22 = 7128$  a hrubá s  $10 \times 10 \times 12 = 1200$  uzly. Konvergence iteračních procedur byla sledována pomocí součtového průměrovaného rezidua  $RR$  příslušného 5 modelovým rovnicím:

$$RR = [\sum\{(R^u)^2 + (R^v)^2 + (R^w)^2 + (R^c)^2 + (R^T)^2\}/\{NX \times NY \times NZ\}]^{1/2}, \quad (17)$$

kde je  $NX, NY, NZ$  počet vnitřních uzlů ve směrech  $x, y, z$ .

Program pro výpočet byl vypracován v jazyce FORTRAN IV. Výpočet jedné SCGS iterace na počítači EC 1033 trval 100 s pro jemnou síť a 15 s pro hrubou síť. Pro tento výpočet byla postačující operační paměť 240kB, přičemž se navíc využívala vnější disková média pro ukládání prvků polí při přechodech mezi sítěmi.

Vzhledem k tomu, že kombinovaná metoda SCGS-multigrid je zcela nová pro modelování proudění skloviny, nebylo dosud provedeno příliš velké množství numerických experimentů. Uvedený příklad makrociklu multigrid byl realizován při pevném počtu 10 cyklů v jemné síti a omezením prahovou hodnotou 0,00045 pro součtové reziduum  $RR$  v hrubé síti. Na obr. 3 je znázorněn průběh konvergence

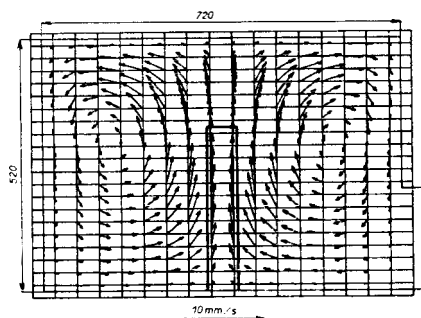


Obr. 3. Rychlost konvergence ( $RR$ ) v hrubé (C) a jemné (F) síti pro cykly multigrid.

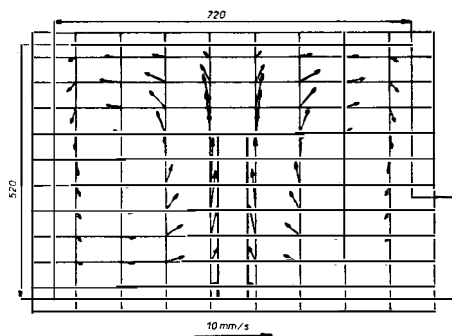
v obou sítích pro výše uvedené relaxační koeficienty  $\epsilon^u, \epsilon^T$ . Třírozměrná struktura proudění je následkem značných vztlakových jevů, způsobených intenzívními tepelnými zdroji v okolí elektrody, dosti složitá. Na obr. 4 je typické rychlostní pole v řezu  $XZ$  procházejícím elektrodou. Je zřejmé, že vliv elektrody je v tomto případě dominantní a převažuje nad vlivem nátoky a výtoku skloviny. Na obr. 5 je pro srovnání znázorněno rychlostní pole ve stejném řezu, avšak vypočtené jednodušovou metodou SCGS v hrubé síti. Srovnáním je vidět, že proudové obrazy



jsou shodné, což lze považovat za dostačující ověření koncepce multigríd. Řešení v jemné síti poskytuje obecně detailnější průběh proudění, a přitom časové nároky na jeho výpočet metodou multigríd jsou více jak 10krát nižší, než kdyby byla na tuto síť aplikována přímo jednosíťová metoda SCGS.



Obr. 4. Rozložení vektoru rychlosti v jemné síti ve svislém řezu  $XZ$  procházejícím tyčovou elektrodou — metoda multigríd.



Obr. 5. Rozložení vektoru rychlosti v hrubé síti ve stejném řezu jako na obr. 4 — jednosíťová metoda.

## ZÁVĚR

Byla vypracována a ověřena velice účinná procedura pro stacionární výpočet třírozměrného teplotního proudění ve sklovině. Iterační algoritmus je založen na svázaném řešení všech modelových rovnic pomocí symetrického Gaussova-Seidelova schématu a na variantě úplné aproximace (FAS) metody multigríd.

Numerickými experimenty bylo ověřeno, že použití dvouúrovňové koncepce multigríd je zcela dostačující ke značnému (řádovému) urychlení konvergence, což považujeme za nejdůležitější výsledek. Pro modelování skloviny s tyčovými elektrodami vzhledem k jejich poměrně těsnému uspořádání je totiž použití více jak dvou úrovní sítí téměř neproveditelné. Řešení vykazuje dále velkou stabilitu i v případě výskytu značných gradientů veličin, zejména teploty. Této stability bylo dosaženo užitím detailní metody dílčích oblastí, blokově svázané iterační procedury SCGS a aplikací koncepce multigríd [6, 7].

## DODATEK 1

## ŘEŠENÍ SOUSTAVY KOREKČNÍCH ROVNIC

Soustavu (11) sedmi korekčních rovnic v bloku SCGS (po vynásobení  $-1$ ) vyjádříme v maticovém tvaru

$$\begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{13} \\ 0 & A_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{14} \\ 0 & 0 & A_3 & 0 & 0 & 0 & A_{15} \\ 0 & 0 & 0 & A_4 & 0 & 0 & A_{16} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_5 & 0 & A_{17} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_6 & A_{18} \\ A_7 & A_8 & A_9 & A_{10} & A_{11} & A_{12} & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \\ X_5 \\ X_6 \\ X_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \\ B_4 \\ B_5 \\ B_6 \\ B_7 \end{pmatrix},$$

kde diagonální prvky  $A_1$  až  $A_6$  představují centrální koeficienty vydělené relaxačním parametrem  $\varepsilon$ ,  $A_1 = S_{i-1}^u/\varepsilon^u$ ,  $A_2 = S_i^u/\varepsilon^u$ , ...,  $A_6 = S_k^w/\varepsilon^w$  a prvky  $A_7$  až  $A_{18}$  převrácené hodnoty diferenčních kroků,  $A_7 = 1/\Delta x$ ,  $A_8 = -1/\Delta x$ ,  $A_9 = 1/\Delta y$ , ...,  $A_{13} = 1/\Delta x$ ,  $A_{14} = -1/\Delta x$ , ...,  $A_{18} = -1/\Delta z$ . Neznámými jsou příslušné korekce  $X_1 = \delta u_{i-1}$ ,  $X_2 = \delta u_i$ , ...,  $X_6 = \delta w_k$ ,  $X_7 = \delta P_0$ . Pravé strany  $B_i$  označují rezidua buď ve tvaru (10), nebo s přidáním defektem ve tvaru (14b), např. pro  $B_1$  platí buď  $B_1 = R1_{i-1}^u = \Sigma D_n^u u^n - S_{i-1}^u u_{i-1} - (P_0 - P_{i-1})/\Delta x$ , nebo  $B1 = R1_{i-1}^u - \gamma_{i-1}^u \tau_{i-1}^u$ . Pravé strany pro neznámé  $\delta w_{k-1}$ ,  $\delta w_k$  obsahují navíc člen  $\delta T_0 \cdot g\beta/2$ , např.  $B_6 = R1_k^w + g\beta T_R - \delta T_0 \cdot g\beta/2$ , kde  $R1_k^w$  je dáno výrazem (12). Řešení této soustavy se provádí finitní metodou tak, že se nejprve vypočtou pomocné hodnoty  $C_j = A_{j+6}/A_j$  pro  $j = 1$  až  $6$ , dále hodnota  $C_7 = \sum_{j=1}^6 C_j \cdot A_{j+12}$ , poslední neznámá  $X_7 = \delta P_0 = (\sum_{j=1}^6 C_j \cdot B_j - B_7)/C_7$  a nakonec ostatní neznámé pomocí vztahu  $X_j = (B_j - X_7 \cdot A_{12+j})/A_j$  pro  $j = 1$  až  $6$ .

## DODATEK 2

## ALGORITMY PRO MEZISÍŤOVÉ PŘENOSY

Systém dvou vnořených,  $3 \times$  přesunutých sítí s úplným zjemněním na 0,5 vyžaduje sudý počet uzlů  $NX^f$ ,  $NY^f$ ,  $NZ^f$  v každém směru jemné sítě. Celkový počet v každém směru hrubé sítě potom bude  $N^c = N^f/2 + 1$ . Indexaci i veličiny v jemné síti budeme dále označovat malými písmeny, a v hrubé síti velkými písmeny. Sítě jsou do sebe vnořeny takovým způsobem, že si navzájem odpovídají nejbližší uzly s indexy  $i = 2 \cdot I - 1$  a  $I = (i + 1)/2$  (podobně pro směry  $y$  a  $z$ ) — viz obr. 2. Pro přenos dvou druhů hodnot, tj. veličin (korekcí) a reziduí, se zde používá jeden druh algoritmů, založený na lineární aproximaci.

## Přenos z jemné sítě do hrubé

Pro veličiny ve stěnách buněk (rychlosti, jejich korekce a rezidua) se použije průměrování pomocí vztahu typu

$$U(I, J, K) = \frac{1}{4} (u(i, j, k) + u(i, j - 1, k) + u(i, j, k - 1) + u(i, j - 1, k - 1)).$$

Pro veličiny ve středech buněk (teplota, tlak, jejich korekce a rezidua) je použit jiný výraz pro průměrování:

$$T(I, J, K) = \frac{1}{8} (t(i, j, k) + t(i, j - 1, k) + t(i - 1, j, k) + \\ + t(i - 1, j - 1, k) + t(i, j, k - 1) + t(i, j - 1, k - 1) + t(i - 1, j, k - 1) + \\ + t(i - 1, j - 1, k - 1)).$$

Přenos z hrubé sítě do jemné

Přenos se provádí trojitou lineární interpolací tak, že z 8 hodnot v hrubé síti se určí vždy 8 odpovídajících hodnot v jemné síti. Pro rychlosti, jejich korekce a rezidua ve stěnách buněk platí vztahy typu

$$u(i, j, k) = \frac{1}{16} (9 \cdot U1 + 3 \cdot (U3 + U5) + U7),$$

$$u(i, j + 1, k) = \frac{1}{16} (9 \cdot U3 + 3 \cdot (U1 + U7) + U5),$$

$$u(i, j, k + 1) = \frac{1}{16} (9 \cdot U5 + 3 \cdot (U1 + U7) + U3),$$

$$u(i, j + 1, k + 1) = \frac{1}{16} (9 \cdot U7 + 3 \cdot (U3 + U5) + U1),$$

$$u(i + 1, j, k) = \frac{1}{32} (9 \cdot (U1 + U2) + 3 \cdot (U3 + U4 + U5 + U6) + U7 + U8),$$

$$u(i + 1, j + 1, k) = \frac{1}{32} (9 \cdot (U3 + U4) + 3 \cdot (U1 + U2 + U7 + U8) + \\ + U5 + U6),$$

$$u(i + 1, j, k + 1) = \frac{1}{32} (9 \cdot (U5 + U6) + 3 \cdot (U1 + U2 + U7 + U8) + \\ + U3 + U4),$$

$$u(i + 1, j + 1, k + 1) = \frac{1}{32} (9 \cdot (U7 + U8) + 3 \cdot (U3 + U4 + U5 + U6) + \\ + U1 + U2),$$

kde je označeno

$$U1 = U(I, J, K),$$

$$U2 = U(I + 1, J, K),$$

$$U3 = U(I, J + 1, K),$$

$$U4 = U(I + 1, J + 1, K),$$

$$U5 = U(I, J, K + 1),$$

$$U6 = U(I + 1, J, K + 1),$$

$$U7 = U(I, J + 1, K + 1),$$

$$U8 = U(I + 1, J + 1, K + 1).$$

Pro veličiny ve středech buněk (tlak, teplota, jejich korekce a rezidua) je použita interpolace typu

$$t(i, j, k) = \frac{1}{64} (27 \cdot T1 + 9 \cdot (T2 + T3 + T5) + 3 \cdot (T4 + T6 + T7) + T8),$$

$$t(i+1, j, k) = \frac{1}{64} (27 \cdot T_2 + 9 \cdot (T_1 + T_4 + T_6) + 3 \cdot (T_5 + T_8 + T_3) + T_7)$$

$$t(i, j+1, k) = \frac{1}{64} (27 \cdot T_3 + 9 \cdot (T_1 + T_4 + T_7) + 3 \cdot (T_5 + T_8 + T_2) + T_6),$$

$$t(i+1, j+1, k) = \frac{1}{64} (27 \cdot T_4 + 9 \cdot (T_2 + T_3 + T_8) + 3 \cdot (T_6 + T_7 + T_1) + T_5),$$

$$t(i, j, k+1) = \frac{1}{64} (27 \cdot T_5 + 9 \cdot (T_6 + T_7 + T_1) + 3 \cdot (T_2 + T_3 + T_8) + T_4),$$

$$t(i+1, j, k+1) = \frac{1}{64} (27 \cdot T_6 + 9 \cdot (T_5 + T_8 + T_2) + 3 \cdot (T_1 + T_4 + T_7) + T_3),$$

$$t(i, j+1, k+1) = \frac{1}{64} (27 \cdot T_7 + 9 \cdot (T_5 + T_8 + T_3) + 3 \cdot (T_1 + T_4 + T_6) + T_2),$$

$$t(i+1, j+1, k+1) = \frac{1}{64} (27 \cdot T_8 + 9 \cdot (T_6 + T_7 + T_4) + 3 \cdot (T_2 + T_3 + T_5) + T_1).$$

V přihraničních uzlech se uvedené vztahy poněkud modifikují pro dodržení okrajových podmínek.

#### Literatura

- [1] Harlow F. H., Welch J. E.: *Phys. Fluids* 8, 2182—2189 (1965).
- [2] Patankar S. V.: *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*. Hemisphere Publ. Corp. New York 1980.
- [3] Vanka S. P.: *Comput. Meth. Appl. Mech. Engng* 55, 321—338 (1986).
- [4] Brandt A.: *Multigrid Methods, Lecture Notes in Mathematics*, Vol. 960, str. 220—312. Springer Verlag, Berlin Heidelberg New York 1982.
- [5] Schill P.: *Sborník VII. konference o elektrickém tavení skla*, str. 74—80, Praha 1986.
- [6] Schill P.: *Tagungsbericht der 10. Ibausil, Sektion 4*, 90—97, Weimar DDR 1988.
- [7] Schill P.: *Proceedings XV th International Congress on Glass*, Vol. 2a, p. 363—343, Leningrad 1989.

#### РАСЧЕТ ТРЕХРАЗМЕРНОГО ТЕЧЕНИЯ СТЕКЛОМАССЫ С ПОМОЩЬЮ МЕТОДА MULTIGRID (МНОГОСЕТОЧНЫЙ МЕТОД)

Петр Шилл

Государственный научно-исследовательский институт стекла, 501 92 Градец Кралове

В работе приводится эффективная расчетная процедура в конечных разностях для трехразмерного течения и температуры стекломассы в стекловаренных печах. Алгоритм основывается на связанном решении уравнений количества движения, непрерывности и энергии в естественных переменных с помощью многосеточного метода. Модельные парциальные уравнения дискретизированы в шахматной сетке с помощью гибридной дифференциальной схемы, которая использует метод частных областей. Для итерационного процесса применяется симметрический метод Гаусса-Сейделя (SCGS), выделяющийся особой скоростью выглаживания. Проводились расчеты в модельной печи со

стержневыми электродами при применении двух разностных сеток с  $10 \times 10 \times 12$  и  $18 \times 18 \times 22$  узловыми точками. Было установлено, что вся процедура весьма быстро сходится к получению подходящей точности.

*Рис. 1. Схема шахматной сетки в плоскости XY.*

*Рис. 2. Упорядочение тонкой и грубой шахматных сеток в плоскости XY.*

*Рис. 3. Скорость конвергенции (RR) в грубой шахматной сетке (C) и тонкой шахматной сетке (F) для многосеточных циклов.*

*Рис. 4. Размещение вектора скорости в тонкой сетке в вертикальном сечении XZ, проходящем через стержневый электрод-многосеточный метод.*

*Рис. 5. Размещение вектора скорости в грубой сетке в том же сечении, как на рис. 4 — односеточный метод.*

## CALCULATION OF THREE-DIMENSIONAL FLOW OF GLASS MELT USING THE MULTIGRID METHOD

Petr Schill

*State Glass Research Institute, 501 92 Hradec Králové*

An efficient finite difference calculation procedure for three-dimensional flow and temperature of glass melt in a glass tank is presented. The algorithm is based on a coupled solution of the momentum, continuity and energy equations in primitive variables by the multigrid technique. The governing partial differential equations are discretized in a staggered mesh by a hybrid differencing scheme using the method of sectiona' solution. The symmetrical coupled Gauss-Seidel technique (SCGS) was used for iterations and found to provide good rates of smoothing. Calculations were made for glass melt in a model tank with rod electrodes using two difference grids of  $10 \times 10 \times 12$  and  $18 \times 18 \times 22$  nodes. The procedure was found to converge rapidly to an acceptable accuracy.

*Fig. 1. Staggered mesh arrangement in the XY plane.*

*Fig. 2. Staggered fine and coarse grid arrangement in the XY plane.*

*Fig. 3. Rate of convergence (RR) in coarse (C) and fine (F) grids for multigrid cycles.*

*Fig. 4. Velocity vector plot in a fine grid for a vertical XZ cross section including one rod electrode — multigrid method.*

*Fig. 5. Velocity vector plot in a coarse grid for the same cross section as in Fig. 4 — single grid method.*

**METHOD AS SOL-GEL.** Gorham Advanced Materials Institute dělá průzkum trhu o možnostech využití metody sol-gel při výrobě progresivní keramiky a skla. Už nyní lze v této oblasti konstatovat, že

- firma 3M vyrábí touto metodou keramická vlákna, která jsou o 50 % pevnější než běžně vyrobená vlákna;
- japonská firma Sumitomo může vyrábět jen touto metodou svá nekonečná vlákna z karbidu křemíku;
- mnohé firmy přicházející na trh s prášky, nekonečnými vlákny a tenkovrstvými supravodiči by je mohly vyrábět metodou sol-gel;
- na základě prášků vyrobených metodou sol-gel lze vyrábět velmi čisté keramické materiály, otěruvzdorné díly a plasmově stříkané povlaky;
- v oblasti biokeramiky se jedná o zubní implantáty z hydroxyapatitu získaného metodou sol-gel;
- z dalších oblastí využití lze jmenovat: keramické kompozity, ultrafiltry, katalyzátory, magnetické ferity, zeolitová molekulová síta, pevné elektrolyty aj.

Dnešní trh keramiky a skla na bázi metody sol-gel se odhaduje na 25—50 mil \$, do r. 1993 má činit 300—500 mil \$.

(Keram. Zeitschrift 40, 1988, č. 9; 655)

*Doušková*

**TECHNOLOGIE PULSED SINTER/HIP PRO VÝROBU KERAMIKY.** Americký Gorham Advanced Materials Institute oznámil, že zahajuje dvouletý program komercializace své technologie PuSH (Pulsed Sinter/HIP process) pro výrobu keramiky. Použitím této technologie se sníží náklady a doba výroby progresivní keramiky pro elektroniku. Technologii lze použít pro výrobu keramiky z oxidu hlinitého, nitridu hliníku, karbidu křemíku, nitridu křemíku, karbidu bóru, diboridu titanu aj. Technologie byla vyvinuta z dřívějších výrobních postupů firmy, spojením slinování a žárového izostatického lisování. Kombinuje se tu krátkodobé slinování s rychlým stlačováním pod tlakem, během krátké doby se generují velmi vysoké tlaky bez potřeby nákladných vysokotlakých nádob. Intenzivní, pulsní tlak stlačuje horké keramické materiály až na 99,5 % jejich teoretické hustoty. Dvouletý program se zaměří na optimalizaci technologie pro výrobu ve velkém a na rozšiřování aplikací specifických keramických materiálů.

(Electronic Chem. News 3, 1988, č. 12, 8—9)

*Doušková*

**STŘEDISKO SLUŽEB ZÁKAZNÍKŮM (Customer Service Centre)** — jako první na světě — postaví nákladem 4 mil e firma Z-TECH v Austrálii. Tím se dále upevní silící pozice fy Z-TECH na světovém trhu progresivní keramiky. Středisko bude zaměstnávat 50 lidí a bude vybaveno nejmodernějším zařízením na zpracování keramických materiálů, jako jsou např. oxid zirkoničitý, oxid hlinitý, nitrid křemíku a oxid titaničitý. Zákazníkům v oblasti strojírenské keramiky, keramiky pro elektroniku a keramických barev bude dodávat keramiku na vyhodnocení. Ve středisku bude také zajišťován návrh výrobků a zpracovatelská poradenská služba.

(Industrial Ceramics 8, 1988, č. 2, 92)

*Doušková*

**VÝZKUM PROGRESIVNÍ KERAMIKY VE ŠVÉDSKU** začal před 15 lety pracemi na žárovém izostatickém lisování u fy Asea v Robertsfors, od té doby byl pokrok v oblasti strojírenské keramiky rychlý. Zasloužil se o to Swedish Institute for Silicate Research (SISR), švédský průmysl i univerzity. V současné době jsou vyvojové práce rozděleny takto:

oblast prací	firmy, instituce
výroba materiálů pro elektrokeramiku a konstrukční keramiku	EKA, Kema Nord Industrikemi
základní výzkum a vývoj materiálů a zpracování	SISR, SIPER, Chalmers Univ, Univ Lulea, Seco Tools, Sandvik, Asea Cerama
výroba keramiky chemickou cestou	Institut for Surface Chemistry (ISC), Berol Kemi
vlákny vyztužená keramika	SISR, Sandvik
technologie zhutňování	SKF, SIPER, Asea Cerama, Sandvik
charakterizace	Chalmers Univ, Univ Lulea, Umea Univ, The Royal Institute of Technology, Sandvik, Asea Cerama, Kema Nord, Studsvik Energi- teknik
výroba a komercializace	Sandvik, Kema Nord, Asea, Seco Tools

Ve Švédsku lze pozorovat rozsáhlou spolupráci na národní bázi, konkurence mezi firmami je omezená, což umožňuje Švédsku udržet si prominentní pozici na mezinárodní scéně.

(Industrial Ceramics 8, 1988, č. 2, 94)

*Doušková*

**NÁKLADY NA VÝZKUM SUPRAVODIČŮ.** V USA bylo v r. 1987 vynaloženo na výzkum supravodičů 84,6 mil \$, na r. 1988 se navrhuje 147,5 mil e (o 74 % více), na r. 1989 205 mil \$. V USA se věnuje více pozornosti základnímu výzkumu; pod záštitou ministerstva obrany se provádí výzkum a vývoj orientovaný na využití v elektronice. V Japonsku činil rozpočet na r. 1988 57 mil \$ (bez platů), velká většina peněz jde do výzkumu aplikací včetně elektroniky.

(Electronic Chem. News 3, 1988, č. 14, 5)

*Doušková*