CERAMICS — Silikáty 34, s. 119—128 (1990)

MATHEMATICAL DESCRIPTION OF THE SHAPE OF FIBRES DRAWN FROM INORGANIC MELTS

KAREL STRNADEL

Stavební izolace, State Corporation, Michelská 12a, 145 00 Prague 4

Received 7. 12. 1988

Thermally insulating materials of mineral fibres can be regarded as a three-dimensional system of originally drop-shaped formations drawn into ones with extremely low thickness-to-length ratios. The original formations arise by dividing a liquid melt into large numbers of small particles whose dimensions and shape depend on surface tension σ of the melt, and on force F which removes the particles from the point of their formation. Force F depends on the mass of the particle being formed and on the speed of its movement. The relationships which have been derived indicate that the calculated fibre thickness increases with the third power of radius of the spherical part of the drop-shaped formation. To raise the yield of the melt in the manufacture of mineral fibres, one should therefore divide the melt into the largest possible amount of small-size particles.

INTRODUCTION

A significant position in the wide range of building materials is taken by thermal insulations, and among those by materials of mineral or rock fibres. These comprise a system of inorganic particles with an extremely low thickness-to-length ratio, which are more-or less randomly arranged and contain large amounts of air in the free space. The mutual positions of the fibres are usually fixed by a bonding agent, mostly of organic origin [9]. The resulting macrostructure of such a material determines its thermally insulating and mechanical properties. These depend on the size of spaces between the individual fibres, the type of their mutual bond and last but not least on the fibre diameter and length, as well as on the presence of other, non-fibrous particles [3].

The solid matrix of the fibrous thermally insulating materials consists of formations which are called fibres in a generally simplified way. In fact they are the products of a technological process whose course can be described as follows:

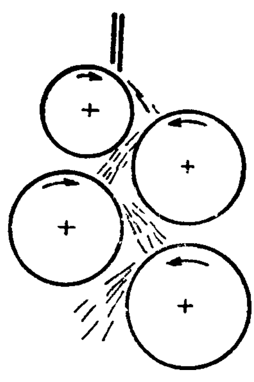

Fig. 1. System of fiberizing wheels for the manufacture of mineral fibres.

A continuous stream of melt of natural or waste material is passed on to a system of rotating disks (Fig. 1). Through contact with their circumference, it is divided into small particles that are thrown away from the place of their formation while becoming elongated into very slender formations. Their temperature decreases and the fibrous shape is thus retained. In the case of mechanical failure of the formation, the fibres are separated and discharged from the fiberizer by conveying air, thus becoming partially separated from the larger unfiberized particles, the granules [2, 4, 5, 6].

MATHEMATICAL INVESTIGATION OF THE PARTICLE SHAPE

In order to study the conditions determining the shape, diameter and possibly also the length of the fibres, it is necessary to investigate the influences affecting the melt reshaping process. The respective considerations are based on the idea that in the course of melt disintegration, the particle is under the effect of force F which removes it from the point of separation (Fig. 2). Under the effect of surface tension the particle acquires a spherical shape at its remote end, and remains joined to the original place where the change in shape occurred. This connection is retained until the melt fails mechanically, i.e. when the fiberizing process is concluded [1, 11].

In agreement with this concept, the particle is a rotative body. For the purpose of the analysis, its drop-shaped form will be composed of the spherical part $O-M$

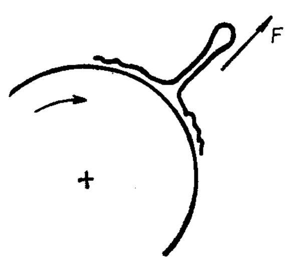

Fig. 2. Creation of a drop-shaped formation on the rotating wheel.

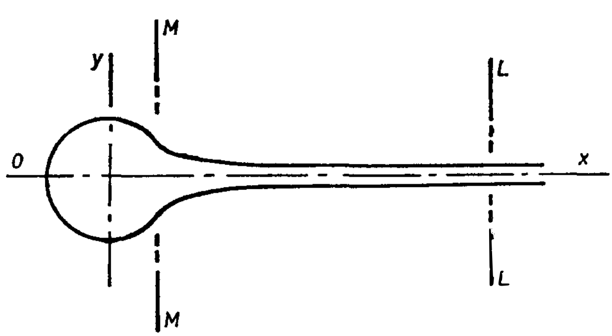

Fig. 3. Idealized drop-shaped formation — the result of the disintegration process.

(Fig. 3) and the $M-L$ part of great slenderness, called fibrous or fibriform [11]. The investigation is aimed at:

— determining the shape of fibrous part $M-L$ of the drop-shaped formation, i.e. analyzing the function

$$y = f(x), \tag{1}$$

which describes its surface curve;

— analyzing the coordinates x_0, y_0 that determine the joint tangential point of the surface curves of the two rotative sections, i.e. the spherical and the fibrous ones of the drop-shaped formation (Fig. 6).

Analytical expression of the shape of a drop-shaped formation at an arbitrary time is based on a static equilibrium of forces at its surface [8]. The individual components of the state of equilibrium are the following:

— surface stress acting in the curved surface of the fibrous section in the plane passing through the longitudinal drop axis;

— surface stress acting in the curved surface of the rotative formation in a plane perpendicular to the former direction;

— inner overpressure in the drop-shaped formation.

The boundary conditions are defined by the common tangential area of the spherical and fibrous sections of the drop-shaped formation at their point of contact M, and by the condition that force F removing the particle from the point of its inception, is transmitted by surface stress in the surface of the drop-shaped formation, i.e. by the strength of its surface layer. The force will be considered as being independent of time in the course of the reshaping process. In the first approximation, the effects of variable melt temperature and the dynamic effects of flow around the drop during the fiberizing will not be taken into account.

For the purpose of the analysis, the general concept of the equilibrium in the droplet surface can be expressed as follows.

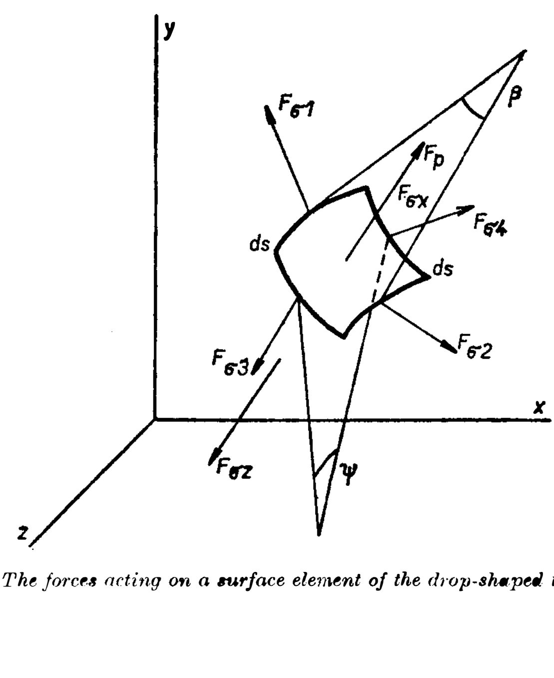

Fig. 4. The forces acting on a surface element of the drop-shaped melt particle.

In plane x, y the following forces act on a surface element of drop-shaped formation with sides ds (Fig. 4):

$$F_{\sigma 1} = F_{\sigma 2} = \sigma \, . \, \mathrm{d}s \qquad [\mathrm{N}], \tag{2}$$

where σ is surface stress, [N m^{-1}].
The two forces are at an angle $\mathrm{d}\beta$ (Fig. 5), and produce the resultant force

$$F_{\sigma x} = 2F_{\sigma 1} \, . \, \sin \mathrm{d}\beta \qquad [\mathrm{N}], \tag{3}$$

where

$$\sin \beta = \frac{\mathrm{d}s}{2R_L} \qquad [-] \tag{4}$$

and the surface curve radius is

$$R_L = \frac{(1 + y'^2)^{3/2}}{y''} \qquad [\mathrm{m}]. \tag{5}$$

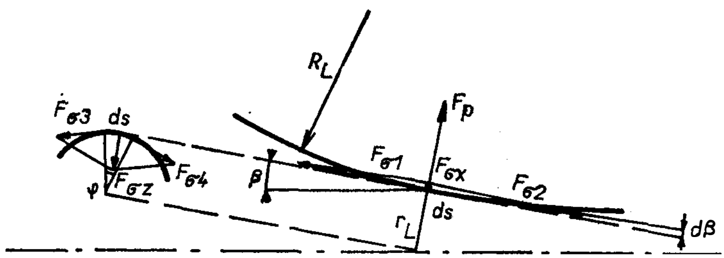

Fig. 5. Calculating conditions of forces acting on a surface element of the drop-shaped formation.

In a plane perpendicular to plane x, y, the same element is under the effect of forces

$$F_{\sigma 3} = F_{\sigma 4} = \sigma \, . \, \mathrm{d}s = F_{\sigma 1} \qquad [\mathrm{N}], \tag{6}$$

which are at an angle of ψ. They have the resultant

$$F_{\sigma z} = 2F_{\sigma 1} \, . \, \sin \frac{\psi}{2} \qquad [\mathrm{N}], \tag{7}$$

where

$$\sin \frac{\psi}{2} = \frac{\mathrm{d}s}{2r_L} \qquad [-] \tag{8}$$

and the length of the normal to the surface curve

$$r_L = y\sqrt{1 + y'^2} \qquad [\mathrm{m}]. \tag{9}$$

The element is finally also under the effect of internal overpressure of the drop-shaped formation. The internal force due to overpressure per element amounts to

$$F_p = p \, . \, \mathrm{d}s \, . \, \mathrm{d}s \qquad [\mathrm{N}], \tag{10}$$

where p is the internal overpressure [Pa].

The size of the overpressure is given by the curvature of the spherical part of the droplet. It holds that

$$p(\mathrm{d}s)^2 = 2F_{\sigma 1}\frac{\mathrm{d}s}{2r} + 2F_{\sigma 3}\frac{\mathrm{d}s}{2r}, \tag{11}$$

so that

$$p = 2\frac{\sigma}{r} \qquad [\mathrm{Pa}], \tag{12}$$

where r is the radius of the spherical part of the drop-shaped formation [m].
All three forces have identical directions and must be in a state of equilibrium,

$$F_{\sigma x} + F_{\sigma z} - F_p = 0. \qquad (\mathrm{N}) \tag{13}$$

Substitution of expressions (3) through (12) into equation (13) yields a relationship for the shape of the surface curve of the fibrous part of the drop-shaped formation,

$$\frac{y''}{(1 + y'^2)} + \frac{2}{r}[1 + y'^2]^{1/2} - \frac{1}{y} = 0. \tag{14}$$

Its solution gives after some modifikations following expresion:

$$\left(\frac{y}{y_0}\right)^2 - \ln\left(\frac{y}{y_0}\right)^4 = 2r\frac{x - x_0}{y_0^2} + 1. \tag{15}$$

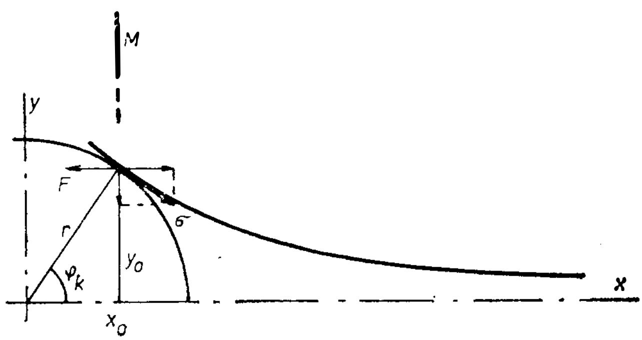

Fig. 6. Description of the connecting area between the spherical and the fibrous parts of the melt formation.

This is an inverse transcendent, whose curvature and displacement in the coordinate system are determined by the first boundary condition. According to this, the curve must pass through point M (Fig. 6) in which it has a common tangent with the circumferential circle of the spherical drop section with radius r. The coordinates of point M are

$$x_0 = r \,.\, \cos\varphi_k \qquad (\mathrm{m}), \tag{16}$$

$$y_0 = r \,.\, \sin\varphi_k \qquad (\mathrm{m}). \tag{17}$$

The central angle has the value

$$\varphi_k = \arcsin\sqrt{\frac{1}{2\pi\sigma}\,\frac{F}{r}} \qquad (\mathrm{rad}). \tag{18}$$

Force F acting on the particle results from the centrifugal effect of the rotating disk, and is defined as

$$F = \frac{4}{3} \pi r^3 \varrho_t R_c \omega^2 \qquad \text{(N)}, \tag{19}$$

where ϱ_t is the melt density, [kg m^{-3}],
R_c is the radius of the fiberizing disk, [m],
ω is the angular speed of the fiberizing disk [rad s^{-1}].

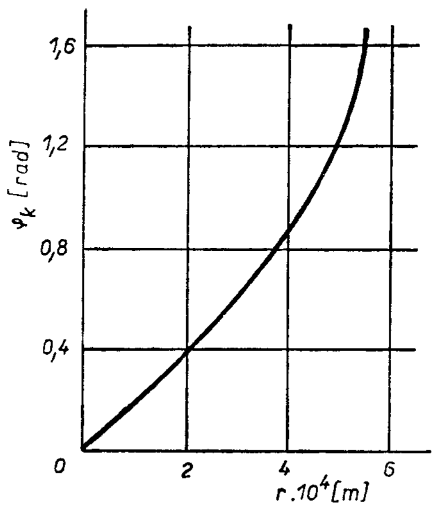

Fig. 7. Central angle φ_k vs. radius r of the spherical part of the drop-shaped formation.

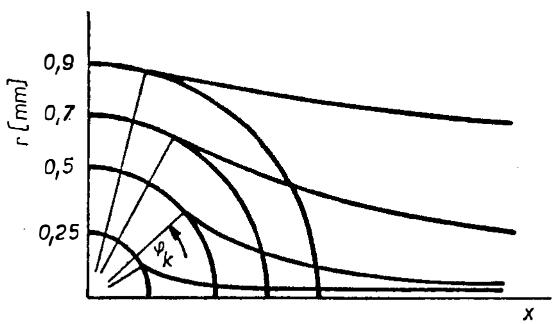

Fig. 8. The shape of the droplet in dependence on the radius of its spherical part.

In terms of spherical section radius r, the central angle φ_k was established numerically from equation (18) and the result is plotted in Fig. 7. The diagram indicates that the value of the central angle increases with particle diameter r. The effect of this relationship on the shape of the drop-like part of the particle is shown in Fig. 8. In regions where φ_k approaches the right angle, no fibres are formed, only particulate grains being produced. For the conditions specially chosen according to Table I, this applies to particles with radii $r > 0.535$ mm.

The second boundary condition allows the fibre thickness at the point of its limit loading, or in other words at that of its tensile failure, to be determined (Fig. 9). It holds that

$$2\pi y_l \sigma \,.\, \sin \varphi = F \qquad (\mathrm{N}), \tag{20}$$

where $\varphi \to 1.57$ rad.

Table I

The special conditions chosen for enumeration of general relationships describing the fibre shape

Melt density	$\varrho_t = 2500\ \mathrm{kg\ m^{-3}}$
Radius of fiberizing disk	$R_c = 0.180\ \mathrm{m}$
Angular speed of fiberizing disk	$\omega = 418.9\ \mathrm{rad\ s^{-1}}$
Air density	$\varrho_a = 1.24\ \mathrm{kg\ m^{-3}}$
Velocity of particle leaving the surface of the fiberizing disk (v is the circumferential velocity of the fiberizing disk)	$w = 0.1v\ \mathrm{m\ s^{-1}}$

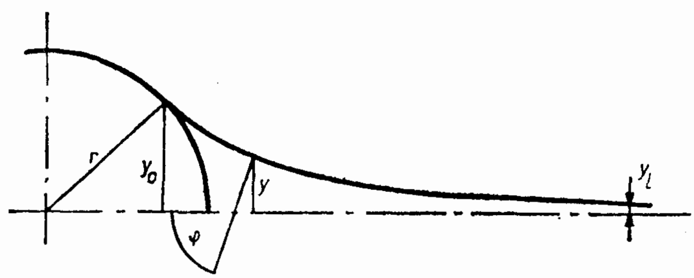

Fig. 9. Calculating conditions for determining the radius of the fibrous part of the drop-shaped formation.

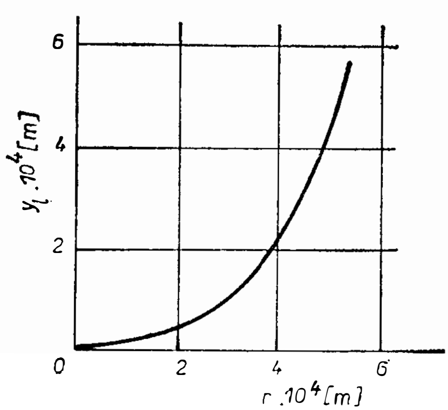

Fig. 10. Calculated thickness of the fibre vs. the radius of the spherical part of the drop-shaped formation.

For the conditions given in Table I [7],

$$y_l = 3{,}511 \,.\, 10^6\, r^3 \qquad (\mathrm{m}).$$

The relationship $y_l = \mathrm{f}(r)$ is plotted in Fig. 10, and shows that the theoretical fibre thickness increases with the third power of spherical droplet radius r.

DISCUSSION

Within the framework of the theoretical treatment, a number of simplifications were introduced and some essential facts not taken into account, namely:

— that the melt does not exhibit the properties of a Newtonian liquid;

— that the assumption of spherical shape of the drop-type formation is not fully conformed to, as the deformation effects investigated in the fibriform section also influence its spherical part;

— that the definition of force F does not involve all of the dynamic effects acting on the particle. Also not included were the dynamic effects of the medium which occur under the conditions of actual production;

— the process is not isothermal. The considerations do not include changes in physical properties at various temperatures of the formation being investigated.

In spite of the simplifications mentioned above, it is possible to formulate conclusions which may be attributed a certain degree of validity even when taking into account the limitations due to the static approach to the problem.

The central angle φ_k (Fig. 6) decreases with decreasing droplet radius, and this relationship is associated with a significant increase in the lengthwise curvature

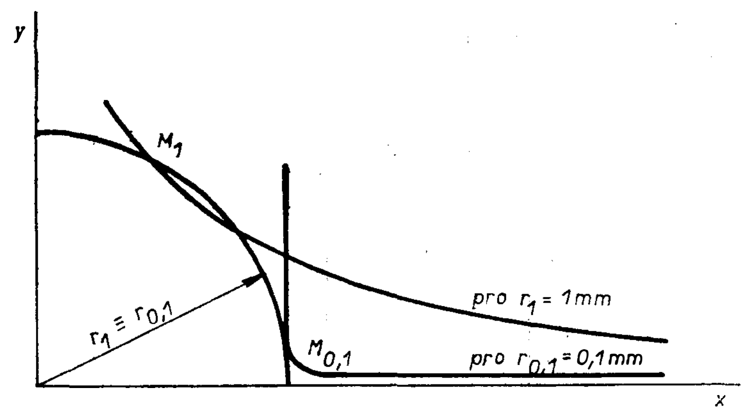

Fig. 11. Two examples of the drop-shaped formation according to the derived analytical expression.

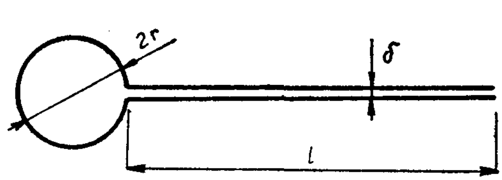

Fig. 12. The simplified shape of the melt droplet facilitating further theoretical study.

of the surface of the fibrous section close to point M. This is demonstrated by the example shown in Fig. 11, as well as by the equations derived above. The example represents the shapes of droplets of $r = 1$ mm and $r = 0.1$ mm respectively. The scales are adjusted so as to make the images equal in size. The fibrous section then shows the relative difference in the shape and the curvature close to point M. Accordingly, in further investigations the drop shape can be replaced by a very simple model consisting of well defined elementary bodies, namely a sphere and a cylinder (Fig. 12).

On the other hand, with increasing radius r of the spherical part $O-M$ of the droplet (Fig. 3), the central angle φ_k will approach the right angle, and the fibrous section will take the form of a cylinder whose radius will converge to the value of r.

The practical significance of the two findings lies in theoretical verification of the empirical rule according to which creation of finer fibres and attainment of higher yields requires primary division of the melt into the largest possible amount of small-radius particles.

CONCLUSION

The basic similarity of the theoretical shape characteristics of mineral fibres and grains to the actual ones seems to justify further study of the relationships between the fibre shape and the force acting on a melt particle, while taking into account the kinetics of fiberizing, the conditions and phenomena involved in the actual anisothermal process, etc.

References

[1] Beglyarov E. M.: Strojitelnyje materialy *8* 26 (1979).
[2] Chernushkin O. A., Kurganov A. M.: Strojitelnyje materialy *5*, 30 (1969).
[3] Knězek J.: Analysis of Mutual Relationships between Basic Physical Properties of Inorganic Fibre Products from the Standpoint of Optimizing their Utilization (in Czech), Research Institute of Building Materials, Brno 1978.
[4] Kulago A. E.: Strojitelnyje materialy *11*, 28 (1974).
[5] Kulago A. E., Myasnikov V. P.: Strojitelnyje materialy *8*, 27 (1980).
[6] Kulago A. E., Zaytseva L. I., Lichkov A. M., Epikchin V. E.: Strojitelnyje materialy *5*, 6 (1980).
[7] Lehner J., Surý L.: *Silicate Fibres* (in Czech), SNTL, Prague 1975.
[8] Smetana J.: *Hydraulics* (in Czech), Academia, Prague 1957.
[9] Strnadel K.: Sklo a keramika *33*, 13 (1983).
[10] Strnadel K.: Stavivo *60*, 53 (1982).
[11] Strnadel K.: Baustoffindustrie *30*, 91 (1987).

MATEMATICKÝ POPIS TVARU VLÁKEN Z ANORGANICKÉ TAVENINY

Karel Strnadel

S. p. Stavební izolace Praha, 145 00 Praha 4

Vláknité tepelné izolace z anorganických tavenin vznikají v podstatě tak, že kompaktní útvar tekuté taveniny se pohybuje velkou rychlostí ve směru proti povrchu rychle rotujícího válce (obr. 1). Dynamickými účinky při rázu se tavenina rozdělí na množství drobnějších částic a ty jsou dále vrhány silou F mimo místo rázu (obr. 2). Vlivem povrchového napětí taveniny se odlétající částice formují do kapkového tvaru, u něhož lze rozlišit kulovou část O—M a na ní

navazující velmi štíhlou vláknovou část $M—L$ — (obr. 3). Současně se snižuje teplota taveniny a vzniklý tvar, zejména jeho štíhlá část, je tak konzervován. Jeho analytické vyjádření vychází z rovnováhy sil působících na element povrchu částice (obr. 4. a 5). Okrajové podmínky určuje jednak bod M (x_0, y_0) (obr. 6), v němž má štíhlá a kulová část kapkového útvaru společnou tečnu, jednak předpoklad o souměrnosti štíhlé části podle roviny L (obr. 3). Řešení rovnice povrchové křivky $y = f(x)$ vede na inverzní transcendentu

$$\left(\frac{y}{y_0}\right)^2 - \ln\left(\frac{y}{y_0}\right)^4 = 2r\,\frac{x - x_0}{y_0^2} + 1.$$

Poloha bodu M je určena středovým úhlem (obr. 6).

$$\varphi_k = \arcsin\sqrt{\frac{1}{2\pi\sigma}\,\frac{F}{r}},$$

kde síla F je závislá na hustotě taveniny, rozměru vznikající částice, poloměru rozvlákňovacího kotouče a frekvenci jeho otáčení. Závislost $\varphi_k = f(r)$ je vyjádřena graficky na obr. 7. Vyplývá z něj, že se u částice s větším poloměrem r zvětšuje i středový úhel φ_k. Tím se mění tvar kapky, jak je naznačeno na obr. 8. V krajním případě, pro $\varphi_k \to 1{,}57$ rad, nelze očekávat tvorbu vlákna, ale pouze vznik nerozvlákněných částic. Pro zvláštní zvolené podmínky podle tab. I. to nastává při $r > 0{,}535$ mm. Pro stejné podmínky je poloměr vlákna v místě jeho mechanického porušení (obr. 9).

$$y_1 = 3{,}511 \,.\, 10^6 \,.\, r^3.$$

Tato závislost je naznačena na obr. 10. Pro získání malých tlouštěk vláken a dosažení větší výtěžnosti taveniny při jejím zpracování na izolační látky pomocí rotujících kotoučů je tedy třeba dosáhnout co největšího množství částic s co možná nejmenším průměrem.

Z obr. 8 vyplývá, že se u částic malých průměrů zvětšuje jejich podélné zakřivení v blízkosti bodu M. Výrazněji to představuje příklad na obr. 11. Dva kapkové útvary o poloměru $r = 1$ a $r = 0{,}1$ mm jsou nakresleny v různém měřítku tak, aby se jejich kulové části na obrázku ztotožňovaly. U vláknových částí jsou pak zřetelně patrné jejich relativní tvarové rozdíly. Podle toho je možné pro další úvahy nahradit skutečný kapkový tvar malých částic jednoduchým modelem z koule a válce (obr. 12).

Přes zjednodušující předpoklady, mezi něž patří především izotermické pojetí, omezení dynamických vlivů na samotný ráz, přisouzení newtonských vlastností tavenině a jiné, potvrzuje shoda teoretických poznatků s praktickými zkušenostmi zásadní platnost odvozených závislostí.

Obr. 1. Systém desintegračních kotoučů pro výrobu minerálních vláken.
Obr. 2. Vznik kapkového útvaru taveniny na rotujícím kotouči.
Obr. 3. Idealizovaný kapkový útvar — výsledek desintegračního procesu.
Obr. 4. Síly působící na element povrchu kapkového útvaru taveniny.
Obr. 5. Výpočetní podmínky sil působících na element povrchu kapkového útvaru
Obr. 6. Popis styčného místa kulové a vláknové části kapkového útvaru taveniny.
Obr. 7. Závislost středového úhlu φ_k na poloměru r kulové části kapkového útvaru.
Obr. 8. Tvar kapkového útvaru v závislosti na poloměru jeho kulové části.
Obr. 9. Výpočetní podmínky pro stanovení poloměru vláknové části kapkového útvaru taveniny.
Obr. 10. Závislost výpočtové tloušťky vlákna na poloměru kulové části kapkového útvaru.
Obr. 11. Dva příklady tvaru kapkového útvaru podle odvozeného analytického vyjádření.
Obr. 12. Zjednodušený tvar kapkového útvaru usnadňující další teoretické úvahy.

Mathematical Description of the Chape of Fibres Drawn from Inorganic Melts

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ФОРМЫ ВОЛОКОН ИЗ НЕОРГАНИЧЕСКОГО РАСПЛАВА

Карел Стрнадел

Соц. предпр. Строительные изоляции Прага, 145 00 Прага

Волокнистые теплоизоляционные материалы из неорганических расплавов образуются в сущности таким образом, что компактное образование текучего расплава движется с большой скоростью в направлении против поверхности быстро вращающегося центробежного валка (рис. 1). В результате динамического действия при ударе расплав разделяется на большое количество более мелких частиц, которые далее под действием силы F движутся на другое место (рис. 2). Под влиянием поверхностного напряжения летящие частицы приобретают каплевидную форму, у которой можно различать шаровидную часть $O—M$ и весьма гибкую волкнистую часть $M—L$, которая является продолжением первой части (рис. 3). Одновременно понижается температура расплава и образовавшаяся форма, именно ее гибкая часть такии образом консервируется. Ее аналитическое определение основывается на равновесии сил, действующих на элементарную часть поверхности частицы (рис. 4 и 5). Краевые условия определяются с одной стороны точкой $M(x_0, y_0)$ — рис. 6, в которой гибкая и шарообразная части каплевидной формы имеют общую касательную, с другой стороны предположением относительно симметричности гибкой в согласии с плоскостью L — рис. 3. Решение поверхностной кривой $y = f(x)$ ведет к инверсионному трансценденту

$$\left(\frac{y}{y_0}\right)^2 - \ln\left(\frac{y}{y_0}\right)^4 = 2r\,\frac{x - x_0}{y_0^2} + 1.$$

Положение точки M определяется центральным углом (рис. 6).

$$\varphi_k = \arcsin\sqrt{\frac{1}{2\pi\sigma}\,\frac{F}{r}}\,,$$

где сила F зависит от плотности расплава, размера образующейся частицы, параметра центробежного валка и частоты его оборотов. Зависимость $\varphi_k = f(r)$ графически выражена на рис. 7. Из рисунка следует, что у частицы с большим параметром r увеличивается и центральный угол φ_k. В результате того и изменяется форма капли, как это приводится на рис. 8. В крайнем случае, при $\varphi_k \to 1{,}57$ rad, нельзя предполагать образование волокна, лишь только образование нерасчлененных волокнистых частиц. При особо подобранных условиях согласно табл. I это проходит при $r > 0{,}535$ мм. При одинаковых условиях параметр волокна имеется на месте его механического нарушения — рис. 9.

$$y_l = 3{,}511\,.\,10^6\,.\,r_3.$$

Упомянутая зависимость приводится на рис. 10. Для того, чтобы получить волокна небольшой толщины и высокую эксплоатацию расплава при его переработке в изоляционные материалы с помощью вращающихся центробежных валков оказывается необходимым получать по возможности наибольшее количество частиц с наименьшим диаметром.

Из рис. 8. следует, что у частиц с небольшим диаметром увеличивается их продольное искривление вблизи точки M. Более наглядно это заметно на примере, приводимом на рис. 11. Две каплеобразные формы параметром $r = 1$ и $r = 0{,}1$ мм изображаются в разном масштабе таким образом, чтобы их шаровидные части на рисунке совпадали. Однако у волокнистых частей более заметны их относительные различия формы. Согласно тому можно для дальнейшего исследования заменить действительно каплеобразную форму небольших частиц несложной моделью, состоящей из шара и цилиндра (рис. 12).

Несмотря на упрощающие предложения, к которым относятся прежде всего изотермическое понимание, ограничение динамических влияний на удар, предложение свойств Ньютона у расплава и др., подтверждает совпадение теоретических знаний с практическим опытом принципиальную действительность выведенных зависимостей.

Recenze knih

W. F. HEMMINGER, H. K. CAMMENGA: METHODEN DER THERMISCHEN ANALYSE (Metody termické analýzy). 299 str., 181 obr., Springer-Verlag, Berlín, Heidelberg, New York, Tokyo, Paris, 1989.

Metody termické analýzy jsou znamenitým nástrojem k řešení rozmanitých chemických problémů a v mnohých oborech jsou dnes zcela nepostradatelné. Záměrem autorů bylo poskytnout čtenáři, který se touto experimentální technikou hodlá zabývat, přehled o současném stavu vývoje těchto metod, a také o možnostech jejich využití v praxi.

Po vymezení pojmu ,,termická analýza" a vysvětlení principu jednotlivých měřicích metod seznamují autoři čtenáře se způsoby interpretace experimentálních měření vycházejícími z pojetí klasické termodynamiky, dále s experimentální technikou jednotlivých metod — termogravimetrie, DTA, DSC, dilatometrií — a také s technikami, které k analýze fázových přeměn probíhajících při ohřevu zkoumaného materiálu používají speciálních technik mikroskopických, difrakčních, magnetometrických aj. U každé ze zmíněných metod je vysvětlen princip, popsáno používané zařízení, způsob vyhodnocení výsledků a možnosti využití. Samostatná kapitola je věnována studiu chemické kinetiky a další pak využití metod termické analýzy k identifikaci látek a posuzování jejich čistoty. Kniha poskytne čtenáři opravdu výstižný přehled o současném stavu vývoje metod termické analýzy a pomůže mu nalézt nové možnosti jejich využití v oboru, v němž čtenář sám pracuje.

Vl. Šatava